

Lösungen
der
Rechnungsaufgaben
für
Schuldienst-Exspektanten.

Von **Dr. Georg Holzner.**

I. Teil.

Arithmetische Aufgaben.

Mit 4 in den Text abgedruckten Bildern.

(Leit.-g. Lager-Lehrer-Zeitung, 1897.)

W. Tümmel's Buch- u. Kunstdruckerei, Nürnberg.



Vorwort.

Als ich im Jahre 1892 anfang, den Hilfslehrerinnen an den Münchener Volksschulen einen Kurs im Rechnen zur Vorbereitung für die Anstellungsprüfungen abzuhalten, schrieb ich die Lösungen sämtlicher Prüfungsaufgaben, welche in der Bayerischen Lehrerzeitung bekannt gegeben worden sind, in der Absicht zusammen, dieselben durch den Druck zu veröffentlichen. Ich machte die Lösungen der Aufgaben in der Raumlehre so, daß ich zuerst die allgemeinen Formeln entwickelte. Bei meinen Vorträgen machte ich aber alsbald die Erfahrung, daß diese Methode eine ganz und gar verfehlte war; dagegen habe ich auf induktivem Wege die besten Erfolge erzielt. Nachdem ich nun während einer vierjährigen Praxis diese Methode als einzig ersprießlich erprobt habe, gebe ich meine Lösungen einem weiteren Kreise von Lehrerinnen und Lehrern mit der Gewißheit bekannt, daß sie ihnen zur Vorbereitung für die Anstellungsprüfung von größtem Nutzen sein werden.

Das ganze Werk umfaßt vier Teile, von denen der erste die Lösungen der bis jetzt in der Bayerischen Lehrerzeitung und in den Schulanzeigern bekannt gegebenen Aufgaben aus der Arithmetik und Physik, der zweite die Lösungen der Aufgaben aus der Planimetrie der dritte die Lösungen der Aufgaben aus der Stereometrie und der vierte die Lösungen der meisten Kopfrechnungsaufgaben enthält. Um eine Stufenleiter von den einfachen zu den zusammengesetzten Aufgaben zu erhalten, habe ich nicht eine Auswahl der schwierigen Fälle getroffen, sondern sämtliche Aufgaben aufgenommen.

Jeder Teil enthält eine kurze Einleitung, in welcher ich auf einige wichtige Sätze hinweise. Die in unzähligen Werken enthaltenen Lehrsätze und entwickelten Grundformeln nochmals abzuschreiben, habe ich unterlassen, weil nach meiner Überzeugung diese, wenn sie vergessen worden sind, am leichtesten wieder aus jenen Büchern und Heften erlernt werden, welche die Lehrer und Lehrerinnen im Seminar benutzt haben.

Bei den Prüfungen wird den Kandidaten nur wenig Zeit zur Ausführung größerer Operationen gewährt; daher habe ich auf Kürzungen und Rechnungsvorteile sorgsam geachtet.

Viele Aufgaben können auf mehrfache Art gelöst werden. In den meisten solchen Fällen habe ich verschiedene Lösungen gemacht. Auch hiedurch wird der einseitige Formalismus vermieden, so daß meine Lösungen auch für solche Lehrer, welche die Anstellungsprüfung hinter sich haben, zur Fortbildung und zum Selbststudium sich vorzüglich eignen werden.

München, am 11. August 1896.

Der Verfasser.

Einleitung.

Die meisten Prüfungsaufgaben müssen durch Anwendung mehrerer verschiedener Sätze gelöst werden. Es war daher nicht möglich, dieselben so zu ordnen, daß in dem einen Kapitel nur Prozentrechnungen, in dem anderen Mischungsrechnungen u. s. w. enthalten sind; aber innerhalb der einzelnen Abteilungen u. s. w. sind die gleichartigen Aufgaben, so gut es ging, zusammengestellt.

Die sogenannten Mischungsrechnungen können mittelst Gleichungen oder auf arithmetischem Wege gelöst werden. Ich habe sie an den Schluß der Gleichungen mit zwei Unbekannten gestellt.

Die letzte Abteilung bilden solche Aufgaben, bei denen ein physikalisches Gesetz zur Anwendung kommt. Die Mischungsrechnungen jedoch, in denen Dichten (spezifische Gewichte) angegeben sind, habe ich nicht in diese letzte Abteilung, sondern, wie eben bemerkt, in die Abteilung der Gleichungen mit zwei Unbekannten gestellt.

Alle Gleichungen mit nur zwei Unbekannten können auch arithmetisch gelöst werden; aber in den meisten Fällen ist eine solche Lösung mit Haaren herbeigezogen.

Bei der Lösung von Gleichungen des ersten Grades mit zwei oder mehreren Unbekannten habe ich in der Regel die Additionsmethode (englische Elimination) angewendet. Bei dieser müssen bekanntlich die zu eliminierenden Unbekannten gleiche Coëffizienten haben. Dieselben können aber sehr häufig ebensogut durch eine Divison oder eine Vermehrung mit einem Bruche wie durch eine Multiplikation mit einer ganzen Zahl hergestellt werden. So können z. B. die Coëffizienten von $\frac{11}{8}x$ und $\frac{5}{29}x$ dadurch einander gleich gemacht werden, daß man das erste Produkt ($\frac{11}{8}x$) mit 5, das zweite Produkt ($\frac{5}{29}x$) mit $\frac{11}{8}$ vermehrt.

Angezeigte Vermehrungen und Teilungen sollen nicht eher ausgeführt werden, als bis sicher ist, daß eine Vereinfachung durch eine entgegengesetzte Operation nicht nachfolgt. Ebenso ist das Wegschaffen der Nenner durch Vermehrung der beiden Seiten einer Gleichung mit dem gemeinsamen Nenner nicht unter allen Umständen vorteilhaft. (Vergl. die Aufgabe 5. Pfalz. 1886. Seite 9.)

Die Zerlegung der Differenz zweier Quadrate in ein Produkt bietet oft Vorteile, so z. B.:

$$\sqrt{\left(\frac{2989}{2}\right)^2 - \left(\frac{539}{2}\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{2989 + 539}{2}\right) \left(\frac{2989 - 539}{2}\right)} = \sqrt{1764 \times 1225} \\ = 42 \times 35 = 1470.$$

Es ist kaum nötig, daran zu erinnern, daß bei unrein quadratischen Gleichungen, nachdem sie auf die Form $x^2 \pm ax = \pm c$ gebracht sind, das dritte Glied ergänzt werden muß, und daß dieses dritte Glied immer $+\left(\frac{a}{2}\right)^2$ ist, so daß hierauf die Gleichung ist: $x^2 \pm ax + \left(\frac{a}{2}\right)^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 \pm c$

Wenn bei Prozentrechnungen Endsummen gesucht oder bei gegebenen Endsummen die ursprünglichen Kapitalien bestimmt werden sollen, so lassen sich ganz einfache Coëffizienten anwenden. So wächst z. B. das Kapital C bei 4% Zunahme nach einem Jahre zur Summe $1,04 \times C$ oder nach 2 Jahren mit einfachen Zinsen zu $1,08 C$ an; bei 5% Abnahme wird es nach einem Jahre $0,95 C$. Werden Zinseszinsen zum Kapital geschlagen und z. B. im ersten Jahre 5%, im zweiten Jahre 4% gewonnen und im dritten Jahre 8% verloren, so ist die Endsumme $1,05 \times 1,04 \times 0,92 C$. Die zweite Methode besteht darin, daß man die Endsumme von Jahr zu Jahr vorwärts oder rückwärts rechnet.

Die an einer Gleichung vorgenommene Änderung habe ich in der Regel damit angezeigt, daß ich z. B. $III = I : 3$ angegeben habe. Dieses $I : 3$ bedeutet, daß beide Seiten der mit I bezeichneten Gleichung durch 3 geteilt worden sind. Ist für eine Unbekannte in einer Gleichung der aus einer anderen Gleichung gefundene Wert eingesetzt worden, so habe ich diese Operation durch (Substitutione) angegeben. Wurde eine neue Gleichung dadurch gebildet, daß zwei Werte der nämlichen Unbekannten durch das Gleichheitszeichen verbunden worden sind, so wurde diese Operation durch (Comparatione) angegeben.



A. Zifferrechnung und allgemeine Gleichungen.

4. Oberpfalz 1882.

Eine große Schlacht fand statt am 14. Juni des Jahres? Die Jahreszahl ergibt sich aus der Lösung der nachfolgenden Aufgabe, in welcher der am Anfange stehende Ausdruck gegeben ist.

Lösung.

$$\begin{aligned} \frac{(2\frac{5}{12} + 5\frac{1}{8}) : [(4\frac{1}{2} - 2\frac{1}{3}) : 2\frac{2}{5}] + 31\frac{9}{20}}{(2\frac{4}{15} - 3\frac{1}{2} \times \frac{3}{5}) : [(2\frac{1}{2} - 1\frac{3}{5}) \times 1\frac{2}{3}] : 4\frac{7}{81}} &= \frac{7\frac{3}{24} : [2\frac{1}{6} : 2\frac{3}{5}] + 31\frac{9}{20}}{(2\frac{4}{15} - 2\frac{1}{10}) : [\frac{9}{10} \times 1\frac{2}{3}] : 4\frac{0}{81}} \\ &= \frac{1\frac{8}{24} : \frac{5}{6} + 31\frac{9}{20}}{\frac{1}{6} : \frac{3}{2} : 4\frac{0}{81}} = \frac{9\frac{1}{20} + 31\frac{9}{20}}{\frac{1}{9} \times \frac{81}{400}} = \frac{40\frac{1}{2}}{(\frac{9}{400})} = 8\frac{1}{2} \times 4\frac{0}{9} = 1800 \end{aligned}$$

Antwort: Die Schlacht fand 1800 statt (Napoleon siegte am 14. Juni 1800 über die Österreicher).

1. Mittelfranken 1882.

Die nachfolgende Division zweier Aggregate soll ausgeführt werden.

Lösung.

$$\begin{aligned} &(\frac{5}{2}xy - \frac{3}{4}xz + \frac{8}{9}y^2 - \frac{2}{5}\frac{2}{3}yz - \frac{1}{9}yu + \frac{7}{18}z^2 + \frac{uz}{3}) : (\frac{3}{2}x + \frac{1}{3}y - \frac{7}{9}z - \frac{2}{3}u) \\ &= \frac{5}{3}y - \frac{1}{2}z \end{aligned}$$

$$\begin{array}{r} \frac{5}{2}xy \qquad \qquad + \frac{8}{9}y^2 - \frac{2}{5}\frac{2}{3}yz - \frac{1}{9}yu \\ - \frac{3}{4}xz \qquad \qquad - \frac{1}{6}yz + \frac{7}{18}z^2 + \frac{uz}{3} \\ - \frac{3}{4}xz \qquad \qquad - \frac{1}{6}yz + \frac{7}{18}z^2 + \frac{uz}{3} \\ + \qquad \qquad \qquad + \qquad \qquad \qquad - \qquad \qquad \qquad \end{array}$$

Antwort: Der Wert des Quotienten ist $\frac{5}{3}y - \frac{1}{2}z$.

3. Pfalz. 1884.

Berechne folgenden Ausdruck: $\frac{x-1}{2x+2} - \frac{3x-4}{3x+3} + \frac{2x-1}{6x+6}$

Lösung.

$$\begin{aligned} \frac{x-1}{2x+2} - \frac{3x-4}{3x+3} + \frac{2x-1}{6x+6} &= \frac{x-1}{2(x+1)} + \frac{4-3x}{3(x+1)} + \frac{2x-1}{6(x+1)} \\ &= \frac{3x-3+8-6x+2x-1}{6(x+1)} \\ &= \frac{4-x}{6(x+1)} \end{aligned}$$

Antwort: Die Vereinfachung des Ausdruckes ergibt $\frac{4-x}{6(x+1)}$

1. Schwaben. 1892.

Man suche den Wert von x in der folgenden Gleichung:

$$\frac{4x}{3} + \frac{2x}{5} + 11 - \frac{x}{7} = x + 631.$$

Lösung.

$$\frac{4x}{3} + \frac{2x}{5} - \frac{x}{7} - x = 620$$

$$140x + 42x - 15x - 105x = 620 \times 105$$

$$62x = 620 \times 105$$

$$x = 1050$$

Antwort: Der Wert von x ist **1050**.

4. Pfalz. 1884.

Löse folgende Gleichung: $\frac{4-2x}{3} - \frac{4}{6x-3} = \frac{1,5x}{x-0,5} - \frac{4x^2}{3(2x-1)}$
(Probe!)

Lösung.

$$\frac{4-2x}{3} - \frac{4}{6x-3} = \frac{1,5x}{x-0,5} - \frac{4x^2}{3(2x-1)}$$

$$\frac{4-2x}{3} = \frac{4}{3(2x-1)} + \frac{3x}{(2x-1)} - \frac{4x^2}{3(2x-1)}$$

$$\frac{4-2x}{3} = \frac{4+9x-4x^2}{3(2x-1)}$$

$$(4-2x)(2x-1) = 4+9x-4x^2$$

$$8x-4x^2-4+2x = 4+9x-4x^2$$

$$x = 8$$

Probe.

$$\text{I. } \frac{4-16}{3} - \frac{4}{48-3} = -\frac{184}{45}$$

$$\text{II. } \frac{12}{7,5} - \frac{256}{45} = \frac{72-256}{45} = -\frac{184}{45}$$

3. Pfalz. 1885.

Welches ist der Wert von x in der Gleichung:

$$\frac{7(x-2)}{x-9} - \frac{6(x+4)}{x-7} - \frac{6x-48}{x^2-16x+63} = 1 \quad (\text{Probe!})$$

Lösung.

$x^2 - 16x + 63 = (x - 9)(x - 7)$. Man multipliziere beide Seiten mit $x^2 - 16x + 63$, sodann erhält man:

$$\begin{aligned} (7x - 14)(x - 7) - (6x + 24)(x - 9) - 6x + 48 &= x^2 - 16x + 63 \\ 7x^2 - 14x - 49x + 98 - 6x^2 - 24x + 54x + 216 - 6x + 48 &= x^2 - 16x + 63 \\ -23x &= -299 \\ x &= 13 \end{aligned}$$

Probe.

$$\frac{7 \times 11}{4} - \frac{6 \times 17}{6} - \frac{78 - 48}{169 - 208 + 63} = 19\frac{1}{4} - 17 - \frac{30}{24} = 2\frac{1}{4} - 1\frac{1}{4} = 1$$

5. Pfalz. 1886.

Man suche den Wert von x in der folgenden Gleichung:

$$\frac{(5b - 9c)x}{7a^2} + 5a - \frac{(15b - 11a)x}{(7b - 5c)} - \frac{6a^2 + 2\frac{1}{3}b}{5a} = \frac{7\frac{1}{5}a^2 - c}{3a} - \frac{(27c - 11a)x}{(7b - 5c)}$$

Lösung.

Statt beide Seiten der Gleichung mit dem gemeinsamen Nenner zu vermehren, forme man zuerst einige Brüche um und addiere dann diejenigen, welche bereits gleiche Nenner haben.

$$\frac{(5b - 9c)x}{7a^2} + 5a - \frac{18a^2 + 7b}{15a} - \frac{36a^2 - 5c}{15a} = \frac{(15b - 11a)x}{(7b - 5c)} - \frac{(27c - 11a)x}{(7b - 5c)}$$

$$\frac{(5b - 9c)x}{7a^2} + \frac{75a^2 - 18a^2 - 7b - 36a^2 + 5c}{15a} = \frac{(15b - 11a - 27c + 11a)x}{(7b - 5c)}$$

$$\frac{(5b - 9c)x}{7a^2} + \frac{21a^2 - 7b + 5c}{15a} = \frac{(15b - 27c)x}{(7b - 5c)}$$

$$\frac{21a^2 - 7b + 5c}{15a} = \frac{3(5b - 9c)x}{(7b - 5c)} - \frac{(5b - 9c)x}{7a^2}$$

$$\frac{21a^2 - 7b + 5c}{15a} = (5b - 9c)x \left[\frac{3}{7b - 5c} - \frac{1}{7a^2} \right]$$

$$\frac{(21a^2 - 7b + 5c)}{15a} = (5b - 9c)x \left[\frac{21a^2 - 7b + 5c}{7a^2(7b - 5c)} \right]$$

$$\frac{1}{15a} = \frac{(5b - 9c)x}{7a^2(7b - 5c)}$$

$$x = \frac{7a^2(7b - 5c)}{15a(5b - 9c)}$$

$$x = \frac{7a(7b - 5c)}{15(5b - 9c)}$$

2. Pfalz. 1883.

Dividiert man die Differenz zweier Zahlen durch 6, so erhält man die kleinere zum Quotienten und 3 zum Reste; dividiert man die Summe derselben durch 13, so erhält man den 12. Teil der größeren und 1 zum Reste. Welches sind die beiden Zahlen?

Lösung.

Die grössere Zahl sei x , die kleinere y , dann ist

$$\text{I.} \quad \frac{x - y - 3}{6} = y$$

$$\text{II.} \quad \frac{x + y - 1}{13} = \frac{x}{12}$$

$$\begin{array}{rcl} \text{III} = 6 \times \text{I} & x - 7y = 3 & \\ \text{IV} = 12 \times 13 \times \text{II} & -x + 12y = 12 & \\ \hline \text{V} = \text{III} + \text{IV} & 5y = 15 & \\ & y = 3 & \\ & x = 24 & \end{array}$$

Antwort: Die größere Zahl ist 24, die kleinere 3.

1. Oberfranken. 1887.

Es gibt eine zweizifferige Zahl von folgender Beschaffenheit: Dividiert man mit der ersten in die zweite, so geht das 204mal und bleibt 1 zum Rest; macht man aber aus beiden Zahlen eine, indem man die erste links vor die zweite setzt, so ist die Zahl gerade halb so groß, als diejenige Zahl, welche man erhält, wenn man umgekehrt die zweite links vor die erste setzt. Wie heißen die beiden Zahlen?

Lösung.

Die zweizifferige Zahl sei x , die vierzifferige y . Wird die erste vor die zweite gestellt, so wird ihr dekadischer Wert 10000fach größer. Der dekadische Wert der vierzifferigen Zahl wird dadurch, daß sie vor die zweiffige gestellt wird, 100 mal größer. Demnach ist

$$\begin{array}{rcl} \text{I.} & \frac{y - 1}{x} = 204 & \\ \text{II.} & (10\,000x + y) = \frac{100y + x}{2} & \\ \hline \text{III} = x \times \text{I} & y - 1 = 204x & \\ \text{IV} = 2 \times \text{II} & 20\,000x + 2y = 100y + x & \\ \hline \text{III.} & y = 204x + 1 & \\ \text{IV.} & 19\,999x = 98y & \end{array}$$

$$\text{IV. (Substit.) } 19\,999\,x = 98 \times (204\,x + 1)$$

$$19\,999\,x = 19\,992\,x + 98$$

$$7\,x = 98$$

$$x = 14$$

$$y = 204 \times 14 + 1 = 2857$$

Antwort: Die zweizifferige Zahl ist 14, die vierzifferige 2857.

1. Niederbayern. 1894.

Von welchen zwei im Verhältniß 5:4 stehenden Zahlen verhält sich die Differenz zum Produkt wie 1:120?

Lösung.

Wenn die beiden Zahlen mit x und y bezeichnet werden, so ist

$$\text{I. } x:y = 5:4$$

$$\text{II. } (x - y):xy = 1:120$$

$$\text{III. aus I. } (x - y):x = 1:5$$

$$(x - y) = \frac{x}{5}$$

$$\text{IV. (Substitut.) } \frac{x}{5}:xy = 1:120$$

$$\text{V. } = \text{IV.}:x \quad \frac{1}{5}:y = 1:120$$

$$y = 24$$

$$x = 30$$

Antwort: Die beiden Zahlen sind 30 und 24.

3. Schwaben. 1893.

Die Differenz der Quadrate zweier Zahlen ist 840. Wäre jede Zahl um 3 größer, so würde die Differenz der Quadrate 900 betragen. Welches sind die beiden Zahlen?

Lösung:

$$\text{I. } x^2 - y^2 = 840$$

$$\text{II. } (x + 3)^2 - (y + 3)^2 = 900$$

$$\text{I. } (x + y)(x - y) = 840$$

$$\text{II. } (x + 3 + y + 3)(x - y) = 900$$

$$\text{III. } = \text{II.}: \text{I.}$$

$$\frac{x + y + 6}{x + y} = \frac{900}{840} = \frac{15}{14}$$

$$\text{IV. } = (x + y) 14 \times \text{III} \quad 14(x + y) + 6 \times 14 = 15(x + y)$$

$$\text{V.}$$

$$84 = x + y$$

$$\text{VI. (Substit.) } x - y = 84^9 = 10$$

$$2x = 94$$

$$x = 47$$

$$y = 37$$

Antwort: Die größere Zahl ist 47, die kleinere 37.

1. Schwaben. 1890.

Zwei Größen stehen im Verhältnisse wie $a:b$. Nachdem aber von jeder c weggenommen worden ist, verhalten sie sich wie $m:n$.*)
Welches sind die beiden Größen?

Lösung.

Bezeichnet x und y die zu suchenden Größen, so ist

$$\text{I. } x:y = a:b$$

$$\text{II. } (x - c):(y - c) = m:n$$

$$\text{III. } x = \frac{a y}{b}$$

*) Die ganz ähnliche Aufgabe, dahin lautend, daß nach der Zuzählung von c die Größen sich wie $m:n$ verhalten, erhält bei den Kopfrechnungen eine Wichtigkeit. Man kann an den beiden Gleichungen folgende Umformungen vornehmen, wobei vorausgesetzt ist, daß $a > b$ und $m > n$ ist:

$$\text{I. } x:y = \frac{a}{b}:1$$

$$\text{II. } (x + y):(y + c) = \frac{m}{n} - 1$$

$$\text{III. (umgeformt I)} \quad (x - y):y = \left(\frac{a}{b} - 1\right):1$$

$$\text{IV. } (x - y) = \left(\frac{a}{b} - 1\right)y$$

$$\text{V. (umgeformt II)} \quad (x - y):(y + c) = \left(\frac{m}{n} - 1\right):1$$

$$\text{VI. } (x - y) = \left(\frac{m}{n} - 1\right)y + \left(\frac{m}{n} - 1\right)c$$

$$\text{VII. (Compar.)} \quad \left(\frac{a}{b} - 1\right)y = \left(\frac{m}{n} - 1\right)y + \left(\frac{m}{n} - 1\right)c$$

Bei arithmetischen Aufgaben mit Ziffern gibt diese Formel verhältnismäßig einfache Werte; z. B.: Bei einem Festessen verhielt sich die Anzahl der Herren zu derjenigen der Damen wie $9:7$. Als noch 20 Paare hinzugekommen waren, war das Verhältniß $13:11$; wie viele Herren und Damen waren anfangs erschienen?

Lösung.

$\frac{a}{b} - 1 = \frac{9}{7} - 1 = \frac{2}{7}$, dann $\frac{13}{11} - 1 = \frac{2}{11}$. Nun ist $\frac{2}{7}$ mal die Anzahl der Damen ebenso viel wie $\frac{2}{11}$ mal dieselbe Zahl und $\frac{2}{11} \times 20$; daher ist $(\frac{2}{7} - \frac{2}{11})$ mal die ursprüngliche Anzahl der Damen $\frac{2}{11} \times 20$ oder $\frac{8}{7}$ mal die Anzahl ist $\frac{40}{11}$; mithin ist die Anzahl der Damen $\frac{40}{11} \times \frac{7}{8} = 35$. Die Anzahl der Herren ist $35 \times \frac{9}{7} = 45$.

$$\begin{aligned} \text{IV. (Substit.)} \quad & \left(\frac{ay}{b} - c \right) : (y - c) = m : n \\ & n \left(\frac{ay - bc}{b} \right) = my - mc \\ & any - nbc = bmy - bmc \\ & y(an - bm) = nbc - bmc \\ & y = \frac{bc(n - m)}{(an - bm)} \quad \text{oder} \quad y = \frac{bc(m - n)}{(bm - an)} \\ & x = \frac{ac(n - m)}{(an - bm)} \quad \text{oder} \quad x = \frac{ac(m - n)}{(bm - an)} \end{aligned}$$

Antwort: Die erste GröÙe ist $\frac{ac(n - m)}{an - bm}$ oder $\frac{ac(m - n)}{(bm - an)}$, die zweite ist $\frac{bc(n - m)}{(an - bm)}$ oder $\frac{bc(m - n)}{(bm - an)}$

1. Oberfranken. 1889.

Es sollen die Werte von x und y in folgenden Gleichungen bestimmt und hiezu die Probe gemacht werden.

$$\begin{aligned} \text{I.} \quad & \frac{a}{x} - (a - b)y = a \\ \text{II.} \quad & \frac{ab}{y} - (a^2 - b^2)x = 0 \end{aligned}$$

Lösung.

$$\begin{aligned} \text{III} &= x \times \text{I} & a - (a - b)xy &= ax \\ \text{IV} &= y \times \text{II} & ab - (a^2 - b^2)xy &= 0 \\ \text{V} &= (a + b) \times \text{III} & a(a + b) - (a^2 - b^2)xy &= a(a + b)x \\ \text{VI} &= \text{V} - \text{IV} & a(a + b) - ab &= a(a + b)x \\ \text{VII} &= \text{VI} : a & a + b - b &= (a + b)x \\ & & x &= \frac{a}{a + b} \\ \text{VIII} &= (x \text{ in I}) & a + b - (a - b)y &= a \\ & & b &= (a - b)y \\ & & y &= \frac{b}{a - b} \end{aligned}$$

Probe.

$$\begin{aligned} \text{I.} \quad & \frac{a}{a} \times (a + b) - \frac{(a - b)b}{(a - b)} = a + b - b = a \\ \text{II.} \quad & \frac{ab}{b} (a - b) - \frac{(a^2 - b^2) \times a}{(a + b)} = a(a - b) - \frac{(a + b)(a - b) \cdot a}{(a + b)} \\ & = a(a - b) - (a - b)a = 0 \end{aligned}$$

4. Schwaben. 1888.

Wenn man aus einer um 8 Einheiten vermehrten Zahl die Quadratwurzel auszieht, so ist die sich ergebende Zahl d. h. die Wurzel um 2 mehr als die Quadratwurzel aus der Hälfte jener Zahl; wie heißt diese?

1890. Pfalz. 1890.

Lösung.

Wird die Zahl mit x bezeichnet, so ist $\sqrt{x+8}$ die Quadratwurzel aus der um 8 vermehrten Zahl, und es ist

$$\sqrt{x+8} = 2 + \sqrt{\frac{x}{2}} \quad (\text{Durch Potenzierung mit 2 erhält man:})$$

$$x+8 = 4 + 4\sqrt{\frac{x}{2}} + \frac{x}{2}$$

$$\frac{x}{2} - 4\sqrt{\frac{x}{2}} + 4 = 0$$

$$(\text{die linke Seite ist } \left[\left(\sqrt{\frac{x}{2}} \right)^2 - 4\sqrt{\frac{x}{2}} + 4 \right] = \left(\sqrt{\frac{x}{2}} - 2 \right)^2 \text{ daher})$$

$$\sqrt{\frac{x}{2}} - 2 = 0$$

$$\sqrt{\frac{x}{2}} = 2$$

$$\frac{x}{2} = 4$$

$$x = 8$$

Die Zahl heißt 8.

3. Pfalz. 1890.

Addiert man zur Summe der Quadrate die Summe zweier Zahlen, so erhält man 12 660; addiert man aber die Differenz derselben zur Differenz ihrer Quadrate, so erhält man 5 580. Welches sind die beiden Zahlen?

Lösung.

Wenn man die beiden Zahlen mit x und y bezeichnet, so ist

$$\text{I.} \quad x^2 + y^2 + x + y = 12\,660$$

$$\text{II.} \quad x^2 - y^2 + x - y = 5\,580$$

$$\text{III} = \text{I} + \text{II} \quad 2x^2 + 2x = 18\,240$$

$$\text{IV} = \text{III} : 2 \quad x^2 + x = 9\,120$$

$$\text{V} = \text{IV} + \frac{1}{4} \quad x^2 + x + \frac{1}{4} = \frac{36\,481}{4}$$

$$\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{36\,481}{4}$$

$$x + \frac{1}{2} = \pm \frac{191}{2}$$

$$x_1 = 95$$

$$x_2 = -96$$

Auf dieselbe Weise erhält man

$$\text{VI} = \text{I} - \text{II} \quad 2y^2 + 2y = 7\,080$$

$$y^2 + y = 3\,540$$

$$y_1 = 59$$

$$y_2 = -60$$

Antwort: Die beiden Zahlen sind entweder 95 und 59 oder -96 u. -60.

B. Lösungen von Aufgaben mit bekannten Grössen.

I. Arithmetische Aufgaben.

1. Unterfranken. 1885.

Ein lediger Mann stirbt am 1. Oktober und hinterläßt folgende Wertpapiere: a) 10 Stück bayerische 4prozentige 100-Thalerlose mit Zins vom 1. Mai l. J., b) 10 000 $\mathcal{M}$ 4prozentige bayerische Staatsobligationen mit Zins vom 1. Juli l. J., c) 20 000 $\mathcal{M}$ 4prozentige Reichsanleihe mit Zins vom 1. März l. J. und eine Lebensversicherungspolice über 5000 $\mathcal{M}$, welche von der betreffenden Gesellschaft als fällig anerkannt ist. Die Beerdigungskosten, kleine Rücksände u. s. w. belaufen sich auf 1350,60 $\mathcal{M}$. In die Hinterlassenschaft teilen sich der noch lebende Bruder und die beiden volljährigen Töchter einer Schwester des Verstorbenen mit der Verpflichtung, an dessen Heimatgemeinde ein Kapital von 4000 $\mathcal{M}$ zu einer Stiftung für Unterrichts- und Wohltätigkeitszwecke auszuzahlen. Die Wertpapiere werden zum Tageskurse in Anrechnung gebracht, und zwar: a) mit $133\frac{1}{3}$, b) mit 103,50 und c) mit $104\frac{3}{8}$. Hiernach ist der Verteilungsplan herzustellen, und zwar nach dem Vermögensstande vom 1. Oktober.

Lösung.

I. a) Kurswert der 10 bayer. 100-Thalerlose

$$= 3000 \times \frac{400}{300} = 4000 \mathcal{M}$$

b) Zinsen derselben für 5 Monate

$$= 3000 \times \frac{4}{100} \times \frac{5}{12} = 50 \mathcal{M}$$

II. a) Kurswert von 10 000 $\mathcal{M}$ bayer. Staatsobligationen

$$= 10000 \times \frac{103,5}{100} = 10350 \mathcal{M}$$

b) Zins derselben für 3 Monate

$$= 10000 \times \frac{4}{100} \times \frac{3}{4} = 100 \mathcal{M}$$

III. a) Kurswert der 20 000 $\mathcal{M}$ Reichsanleihe

$$= 20000 \times \frac{104,375}{100} = 20875 \mathcal{M}$$

b) Zins derselben für 7 Monate

$$= 20000 \times \frac{4}{100} \times \frac{7}{12} = 466\frac{2}{3} \mathcal{M}$$

IV. Lebensversicherung = 5000 = 5000 $\mathcal{M}$

Summe der Aktiva $40841\frac{2}{3} \mathcal{M}$

V. Beerdigungskosten etc. = 1350,60 = 1350,60 $\mathcal{M}$

VI. Legat = 4000 = 4000,00 $\mathcal{M}$

Passiva $5350\frac{3}{5} \mathcal{M}$

Reines Vermögen $35491\frac{1}{5} \mathcal{M}$

Hievon erhält der Bruder die Hälfte = $17745\frac{8}{15} \mathcal{M}$ und jede Tochter der Schwester ein Viertel = $8872\frac{2}{3} \mathcal{M}$.

5. Oberpfalz. 1888.

Ein Vater hinterläßt seinen Kindern: 1) zwei Obligationen a) zu 1000 *M.* im Kurse zu $102\frac{1}{2}$ mit den vierteljährigen $4\frac{1}{2}$ prozentigen Zinsen, b) zu 1500 *M.* im Kurse zu 99 samt den halbjährigen $4\frac{1}{2}$ prozentigen Zinsen; 2) an Sparkassessescheinen 860 *M.* samt zweijährigen Zinsen und Zinseszinsen zu $3\frac{1}{3}\%$; 3) eine Lebensversicherungs-Police zu 25 000 *M.* mit $1\frac{1}{2}$ prozentigem Abzuge; 4) einen Sterbekassesseschein zu 1800 *M.* mit 6% Abzug; 5) 400 *M.* an barem Gelde. Die Erbschaftssteuer beträgt $1\frac{1}{2}\%$ der Gesamtsumme, welche ohne diese zur Verteilung kommen würde. Das reine Vermögen wird unter die vier Kinder so verteilt, daß A $\frac{1}{3}$, B $\frac{1}{4}$, C $\frac{1}{5}$ und D den Rest erhält. Welches ist der Anteil jedes Kindes? (Pfennigbrüche unter 0,5 bleiben außer Ansatz, über 0,5 werden sie als Ganzes gerechnet.)

Lösung.

A. Die zu verteilende Summe berechnet sich in folgender Weise:

I. Obligationen

a)	1025 <i>M.</i> Kurs	11,25 <i>M.</i> Zinsen ohne Abzug	=	1036,25 <i>M.</i>
b)	1485 <i>M.</i> "	33,75 <i>M.</i> " " "	=	1518,75 <i>M.</i>

II. Sparkasse

860 <i>M.</i> Einlage	58,29 <i>M.</i> Zinseszinsen ohne Abzug	=	918 29 <i>M.</i>
-----------------------	---	---	------------------

III. Lebensversicherung

25 000 <i>M.</i> ohne Zinsen	375 <i>M.</i> Abzug	=	24 625,00 <i>M.</i>
------------------------------	---------------------	---	---------------------

VI. Sterbekassesseschein

1 800 <i>M.</i> ohne Zinsen	108 <i>M.</i> Abzug	=	1 692,00 <i>M.</i>
-----------------------------	---------------------	---	--------------------

V. Bargeld

400 <i>M.</i> ohne Zinsen	ohne Abzug	=	400,00 <i>M.</i>
---------------------------	------------	---	------------------

30 190,29 *M.*

Hievon ab die Steuer mit

452,85 *M.*

Zur Verteilung 29 737,44 *M.*

Hievon erhält A $\frac{29737,44}{3} = 9912,48$ *M.*

B $\frac{29737,44}{4} = 7434,36$ *M.*

C $\frac{29737,44}{5} = 5947,49$ *M.*

D $\frac{29737,44 \times 13}{60} = 6443,11$ *M.*

Antwort: A erhält 9912,48 *M.*, B 7434,36 *M.*, C 5947,49 *M.* und D 6443,11 *M.*

1. Oberbayern. 1890.

Bei einer Feuersbrunst wurde eine mit 408 Litern gefüllte Spritze in Thätigkeit gesetzt. Nachdem sie 3 Minuten gewirkt hatte, wurde

mit 2 Gefäßen, von denen das eine den doppelten Inhalt des ersten hatte, Wasser zugegossen, und zwar wurde das erste in jeder Minute 15mal, das zweite 7mal geleert. Als die Spritze 15 Minuten lang in Thätigkeit gewesen war, befand sich in derselben kein Wasser. Wie viele Liter faßte jedes Gefäß, wenn die Feuerspritze in der Minute 12 Stöße machte und mit jedem Stoß 10 Liter Wasser entleerte?

1. Lösung.

- I. Die Maschine entleerte in 15 Minuten $15 \times 12 \times 10 = 1800$ Liter.
- II. Da schon vorher 408 Liter in der Maschine waren, so mußten $1800 - 408 = 1392$ Liter mit den Gefäßen in 12 Minuten nachgegossen werden d. i. 116 Liter in jeder Minute.
- III. Wenn das erste Gefäß 1 Liter faßte, so faßte das zweite Gefäß 2 Liter, und es wurden mit dem ersten Gefäß 15 Liter, mit dem zweiten 14 Liter im ganzen 29 Liter in jeder Minute zugeführt. In Wirklichkeit wurde 4mal mehr geleistet; also war der Inhalt 4mal größer, so daß das erste Gefäß **4 Liter**, das zweite **8 Liter** faßte.

2. Lösung.

Wenn das erste Gefäß x Liter, das zweite $2x$ Liter faßte, so wurden in jeder Minute $15x + 14x = 29x$ Liter und in 12 Minuten $12 \times 29x = 348x$ Liter zugegossen. Es ist nun $348x + 408$ Liter die Menge, welche die Maschine in 15 Minuten entleerte. Diese Menge ist $15 \times 12 \times 10 = 1800$ Liter. Somit ist

$$348x + 408 = 1800$$

$$x = \frac{1392}{348} = 4 \text{ Liter}$$

Antwort: Das erste Gefäß hatte **4 Liter**, das zweite **8 Liter** Inhalt.

1. Unterfranken. 1881.

Ein Seiler kauft 260 kg Rohanf à 1 $\mathcal{M}$. Beim Hecheln hat er 20 kg Abgang und erhält 5 Teile schönes, 4 Teile geringes und 3 Teile Abwerg. Hiebei hat er 10 $\mathcal{M}$ Unkosten. Das Werg verkauft er und erhält für 3 kg Abwerg so viel als für 2 kg geringes, für 3 kg geringes so viel als für 2 kg schönes Werg. Wie hoch kommt 1 kg jeder Sorte, wenn auf diese Weise ein Gewinn von 20 Prozent erzielt wird?

Lösung.

- I. An Werg wurden $260 - 20 = 240$ kg erhalten. Hievon waren $\frac{5}{12}$ d. i. 100 kg schönes, $\frac{4}{12}$ d. i. 80 kg geringes und $\frac{3}{12}$ d. i. 60 kg Abwerg.
- II. Die Auslagen betrugen $260 + 10 = 270$ $\mathcal{M}$.

- III. Eingenommen wurden $270 + \frac{270}{5} = 324 \text{ M.}$
- IV. Die Preise stehen im umgekehrten Verhältnisse zu den Gewichten der Sorten, welche um die nämliche Einkaufssumme erhalten werden. Es kostet daher 1 kg schönes Werg $\frac{3}{2} \text{ M.}$, wenn 1 kg geringes 1 M. kostet, und 1 kg Abwerg $\frac{2}{3} \text{ M.}$, wenn 1 kg geringes 1 M. kostet. Die Verhältnisse $\frac{3}{2} : 1 : \frac{2}{3} = 9 : 6 : 4$. Nach diesem Verhältnisse würden 100 kg schönes Werg 900 M. kosten, wenn 80 kg geringes 480 M. und 60 kg Abwerg 240 M., somit das gesamte Werg 1620 M. kosten würde.
- V. Hienach treffen von der Einnahme von 324 M. auf das schöne Werg $324 \times \frac{900}{1620} = 180 \text{ M.}$, auf das geringe $324 \times \frac{480}{1620} = 96 \text{ M.}$, auf das Abwerg $324 \times \frac{240}{1620} = 48 \text{ M.}$
- VI. Es kostet 1 kg schönes Werg $180 : 100 = 1,80 \text{ M.}$, 1 kg geringes $96 : 80 = 1,20 \text{ M.}$ und 1 kg Abwerg $48 : 60 = 0,80 \text{ M.}$

1. Mittelfranken. 1886.

A und B gründeten am 1. April ein Kompagniegeschäft. A legte 9000 M., B 7500 M. ein. Am 1. August vermehrte B seine Einlage um 1500 M.; am 1. September nahm dagegen A 1200 M. aus dem Geschäfte. Am 1. April des folgenden Jahres teilten sie den Gewinn unter sich. Wie viel bekam jeder, wenn der Gewinn 5040 M. beträgt? (Ist arithmetisch zu lösen!)

Lösung.

I.	A	hatte	7800 M.	12 Monate lang	$=$	93 600 M.	1 Monat lang	
			1200 M.	5 „	$=$	6 000 M.	1 „	„
						99 600 M.	1 „	„
II.	B	„	7500 M.	12 Monate lang	$=$	90 000 M.	1 „	„
			1500 M.	8 „	$=$	12 000 M.	1 „	„
						102 000 M.	1 „	„

im Geschäfte. Der Gewinn von 5040 M. ist daher im Verhältnisse $996 : 1020 = 83 : 85$ zu teilen. Folglich erhält

$$A \quad \frac{5040}{168} \times 83 = 2490 \text{ M.}$$

$$B \quad 5040 - 2490 = 2550 \text{ M.}$$

Antwort: A bekam vom Gewinne 2490 M., B 2550 M.

1. Unterfranken. 1888.

A fängt ein Geschäft mit 3000 M. an. Nach 6 Monaten tritt B mit 1800 M. und C mit 2000 M. ein. Nachdem sie 10 Monate gehandelt haben, tritt D der Gesellschaft bei, kauft A 1200 M. und

B 400 *M.* ab und legt außerdem noch 600 *M.* dazu. Nach 8 Monaten nehmen sie E auf, der dem A 200 *M.*, dem B ebenfalls 200 *M.* abkauft und 1000 *M.* selbst beiträgt. Nach weiteren 4 Monaten trennt sich die Gesellschaft mit einem Gewinne von 13 272 *M.* Wie viel erhält jeder, wenn A wegen besonderer Dienstleistungen $12\frac{1}{2}\%$ und C 5% mehr erhalten, als ihnen nach Verhältnis ihrer Einlagen zukommt?

Lösung.

I. A ist beteiligt mit:

a)	3000 <i>M.</i>	16 Monate lang	=	48 000 <i>M.</i>	1 Monat lang	
b)	1800 <i>M.</i>	8 „ „	=	14 400 <i>M.</i>	1 „ „	
c)	1600 <i>M.</i>	4 „ „	=	6 400 <i>M.</i>	1 „ „	
				68 800 <i>M.</i>	1 „ „	
d)	durch besondere Dienstleistung	8 600 <i>M.</i>				
						77 400 <i>M.</i>

II. B ist beteiligt mit:

a)	1800 <i>M.</i>	10 Monate lang	=	18 000 <i>M.</i>	1 Monat lang	
b)	1400 <i>M.</i>	8 „ „	=	11 200 <i>M.</i>	1 „ „	
c)	1200 <i>M.</i>	4 „ „	=	4 800 <i>M.</i>	1 „ „	
						34 000 <i>M.</i>

III. C ist beteiligt mit:

a)	2000 <i>M.</i>	22 Monate lang	=	44 000 <i>M.</i>	
b)	durch besondere Dienstleistung	2 200 <i>M.</i>			
					46 200 <i>M.</i>

IV. D ist beteiligt mit:

2200 <i>M.</i>	12 Monate lang	=	26 400 <i>M.</i>
----------------	----------------	---	------------------

V. E ist beteiligt mit:

1400 <i>M.</i>	4 Monate lang	=	5 600 <i>M.</i>
			189 600 <i>M.</i>

Mit 189 600 *M.* werden 13 272 *M.* gewonnen, sohin mit 1 Mark $\frac{13\,272}{189\,600} = 0,07$ *M.* Mithin erhält

A	77 400 $\times$ 0,07 =	5418 <i>M.</i>
B	34 000 $\times$ 0,07 =	2380 <i>M.</i>
C	46 200 $\times$ 0,07 =	3234 <i>M.</i>
D	26 400 $\times$ 0,07 =	1848 <i>M.</i>
E	5 600 $\times$ 0,07 =	392 <i>M.</i>

2. Schwaben. 1890.

Drei Kaufleute vereinigen sich zu einem Geschäft. A legt $\frac{1}{2}$ mal so viel ein wie C oder 2000 $\mathcal{M}$ weniger als B. Vom Gewinne zu 6500 $\mathcal{M}$ erhält C 3000 $\mathcal{M}$. Wie viel hat jeder eingelegt?

1. Lösung.

- I. Da C von 6500 $\mathcal{M}$ Gewinn 3000 $\mathcal{M}$ erhält, so erhält A, der nur die Hälfte von C einlegt, 1500 $\mathcal{M}$ und für B bleiben 2000 $\mathcal{M}$.
- II. B hat 500 $\mathcal{M}$ mehr als A erhalten, weil B 2000 $\mathcal{M}$ mehr eingelegt hatte. Hieraus folgt, daß 25% gewonnen worden sind.
- III. Da die Einlagen 4mal größer sind, als die betreffenden Gewinne, so mußte A **6000 $\mathcal{M}$** , B **8000 $\mathcal{M}$** und C **12000 $\mathcal{M}$** eingelegt haben.

2. Lösung.

Bezeichnet x $\mathcal{M}$ die Einlage des A, so hat C 2x und B (x + 2000) $\mathcal{M}$ eingelegt. Es betragen daher die Einlagen (4x + 2000) $\mathcal{M}$. Mit je 1 $\mathcal{M}$ wurde gewonnen

$$\begin{aligned} \frac{3000}{2x} \text{ oder } \frac{6500}{4x + 2000} \text{ daher ist} \\ \frac{15}{x} &= \frac{65}{4x + 2000} \\ 60x + 30000 &= 65x \\ x &= \mathbf{6000 \mathcal{M}.} \end{aligned}$$

Antwort: A hat **6000 $\mathcal{M}$** , B **8000 $\mathcal{M}$** und C **12000 $\mathcal{M}$** eingelegt.

1. Schwaben. 1885.

Zum Bau eines Hauses gibt A $\frac{5}{12}$ und B $\frac{7}{12}$ her. Letzterer verkauft $\frac{2}{5}$ seines Anteils mit 10% und den Rest mit $16\frac{2}{3}\%$, im ganzen mit 490 $\mathcal{M}$ Vorteil. Wie viel hat jeder von ihnen zum Bau hergegeben?

1. Lösung.

Die Einlage des B betrage x $\mathcal{M}$, wovon $\frac{2}{5}x$ zu 10% und $\frac{3}{5}$ mit $16\frac{2}{3}\%$ Gewinn verkauft werden.

$$\begin{aligned} \frac{2}{5}x \times \frac{10}{100} + \frac{3}{5}x \times \frac{50}{300} &= 490 \mathcal{M} \\ 4x + 10x &= 49000 \mathcal{M} \\ 14x &= 49000 \mathcal{M} \\ x &= \mathbf{3500 \mathcal{M}} \text{ (Einlage des B)} \\ 3500 \times \frac{5}{7} &= \mathbf{2500 \mathcal{M}} \text{ (Einlage des A)} \end{aligned}$$

2. Lösung.

Von je 500 *M.*, welche B verkauft hat, betrug der Gewinn $200 \times \frac{10}{100} + 300 \times \frac{50}{300} = 20 + 50 = 70$ *M.* Die Einlage des B war daher $\frac{490}{70} \times 500 = 3500$ *M.* Diejenigen des A betrug $\frac{3500 \times 5}{7} = 2500$ *M.*
Antwort: A hat 2500 *M.*, B 3500 *M.* zum Bau hergegeben.

1. Schwaben. 1894.

Zu Bau eines Hauses gibt A $\frac{5}{12}$ und B $\frac{7}{12}$ einer Summe her. Letzterer verkauft $\frac{2}{5}$ seines Anteils mit 10% und den Rest mit 16 $\frac{2}{3}$ % Gewinn und gewinnt hiedurch im Ganzen 980 *M.* Wie viele Mark hat jeder der beiden zum Bau hergegeben?

Lösung.

- I. Je 500 *M.* der Einzahlung des B brachten beim Verkaufe $(2 \times 10 + 3 \times 16\frac{2}{3})$ *M.* = 70 *M.* Gewinn.
 - II. Der Beitrag von B war $\frac{980}{70} \times 500 = 7000$ *M.*
 - III. Der Beitrag von A verhält sich zu dem des B wie 5 : 7 ; also hatte A 5000 *M.* hergegeben?
- Antwort: A hat 5000 *M.*, B 7000 *M.* hergegeben.

2. Unterfranken. 1892.

Nach dem Ableben ihres Mannes verkaufte eine Frau Geschäft und Liegenschaften und hat nach Begleichung aller Verbindlichkeiten noch 18560 *M.* reines Vermögen. Dazu erhält sie noch aus einer Lebensversicherung 10000 *M.* ausbezahlt. Sie legt nun am 5. Mai ihr Vermögen folgendermaßen an: a) 8000 *M.* in einer 5prozentigen ersten Hypothek, b) 6000 *M.* in einer 5 $\frac{1}{2}$ prozentigen zweiten Hypothek, c) 12000 *M.* in 4prozentigen Staatsanlehen, die sie im Kurse zu 104,5 kauft (Zinstag: 1. Januar und 1. Juli), d) 1500 *M.* in eine Sparkasse, die 3 $\frac{3}{4}$ % Zins bezahlt; den Rest behielt sie zurück. Wie groß ist dieser? Wie viel Zins nimmt sie jährlich ein?

Lösung.

A. Einnahmen:		I. Kaufschilling	18 560 <i>M.</i>	
		II. Lebensversicherung	10 000 <i>M.</i>	
				28 560 <i>M.</i>
B. Ausgaben:		I. Erste Hypothek	8 000,00 <i>M.</i>	Zins 400,00 <i>M.</i>
		II. Zweite Hypothek	6 000,00 <i>M.</i>	" 330,00 <i>M.</i>
		III. Obligationen	12 540,00 <i>M.</i>	" 480,00 <i>M.</i>
		IV. Zinsvergütung	166,67 <i>M.</i>	
		V. Sparkasse-Einlage	1 500,00 <i>M.</i>	" 56,25 <i>M.</i>
		VI. Rest	353,33 <i>M.</i>	
				28 560 <i>M.</i> mit 1266,25 <i>M.</i>

Antwort: Der zurückbehaltene Rest war 353,33 *M.* — Die Witwe nimmt an Jahreszinsen 1266,25 *M.* ein.

1. Oberbayern. 1893.

Jemand erhielt eine Sendung Ware und bezahlte für $2\frac{1}{2}$ kg 12 *M.* Im Magazin verderben $\frac{3}{10}$ der Ware und waren deshalb unverkäuflich. Obgleich er von der noch guten Ware je $1\frac{1}{4}$ kg für $7\frac{1}{2}$ *M.* verkaufte, verlor er dennoch einschließlich der Spesen, welche 4,40 *M.* betrugen, 47,60. Wie viel betrug das Nettogewicht der Sendung?

Lösung.

Der Verlust am Handel mit der Ware allein betrug $47,60 - 4,40 = 43,2$ *M.* Beim Kaufe von je 20 kg wurden bezahlt 96 *M.*, dagegen eingenommen $14 \times \frac{1}{2} \times \frac{4}{5} = 84$ *M.* Es wurden also bei je 20 kg 12 *M.* verloren. Hieraus berechnet sich die angekaufte Menge zu $\frac{43,2}{12} \times 20 = 7,2 \times 10 = 72$ kg.

Antwort: Das Nettogewicht der eingekauften Ware betrug 72 kg.

2. Unterfranken. 1888.

Ein Kaufmann empfängt eine Warensendung im Bruttogewicht von 6 Zentner. Die Tara beträgt 6% ; außerdem wird noch vom Nettogewicht $\frac{1}{2}$ % Gutgewicht (in ganzen Pfunden) abgerechnet. Bei der Öffnung ergibt sich, daß 190 Pfd. der Ware beschädigt sind. Während das Pfund der guten Ware zu 2 *M.* veranschlagt ist, wird für die beschädigte ein besonderer Preis von 1,20 *M.* vereinbart. Wie viel wird nun beim Wiederverkauf der Ware gewonnen, wenn das Pfund der ersteren zu 2,70 *M.*, das Pfund der letzteren nur zu 1,05 *M.* angebracht wird?

Lösung.

A. I. Das Bruttogewicht ist 600 Pfd. die Tara 36 Pfd. u. das Nettogewicht 564 Pfd.

II. Das Gutgewicht beträgt $564 \times \frac{1}{200} = 2,82$ Pfd. d. i. 3 Pfd.

III. Belastetes Gewicht 561 Pfd.

IV. Beschädigte Ware 190 Pfd.

V. Unbeschädigte Ware 374 Pfd.

B. Auslage: I. $190 \times 1,2 = 228$ *M.* Einnahme: I. $190 \times 1,05 = 199,5$ *M.*

II. $371 \times 2 = 742$ *M.* II. $374 \times 2,7 = 1009,8$ *M.*

970 *M.* 1209,3 *M.*

Antwort: Es wurden $1209,3 - 970 = 239,30$ *M.* gewonnen.

5. Oberpfalz. 1889.

Jemand vertauschte Kartoffeln gegen Rüben. Der Zentner der ersteren wurde zu 2,20 *M.*, der letzteren zu 2,50 *M.* berechnet. An

Rüben waren für 30 *M.* weniger vorhanden als an Kartoffeln. Gleichwohl hatte der Empfänger der Rüben an den anderen noch 1,20 *M.* hinauszuzahlen. Wie viele Zentner Kartoffeln und wie viele Zentner Rüben waren vorhanden?

1. Lösung.

Da um 30 *M.* weniger Rüben als Kartoffeln vorhanden waren, so betrug der Unterschied in der Menge $\frac{30}{2,5} = 12$ Zentner. Hätte der Rübenbesitzer ebenso viele Zentner Rüben als der andere Händler Kartoffeln gehabt, so hätte der letztere $30 + 1,2 = 31,2$ *M.* bezahlen müssen, weil 1 Zentner Rüben um $2,50 - 2,20 = 0,30$ *M.* mehr gekostet hat. Demnach waren $\frac{31,2}{0,3} = 104$ Zentner Kartoffeln in Tausch gegeben worden. Die Rüben wogen $104 - 12 = 92$ Zentner.

2. Lösung.

Wenn x Zentner Kartoffeln vorhanden waren, so hat der Kartoffelbesitzer an Geldwert und Geld gegeben $(2,2x + 1,2)$ *M.*; der Rübenbesitzer hat $(x - 12) \times 2,5$ gegeben. Demnach ist

$$(x - 12) \times 2,5 = 2,2x + 1,2$$

$$2,5x - 2,2x = 30 + 1,2$$

$$x = 104 \text{ Zentner.}$$

Antwort: Es wurden **104 Zentner** Kartoffeln gegen **92 Zentner** Rüben vertauscht.

2. Oberpfalz. 1887.

Ein Kaufmann stellte seine Zahlungen ein. Er hat nach seinen Büchern 21 572 *M.* zu fordern, und sein Warenlager beträgt 1438 *M.* Dagegen ist er 37 580 *M.* schuldig. Wie viel hat ein Gläubiger, dem obiger Kaufmann 790 *M.* schuldet, zu erwarten, wenn er auf 4% (für alle Gläubiger) weniger rechnen muß, als jener geben könnte?

Lösung.

I. Die Aktiva betrugen $21\,572 + 1438 = 23\,010$ *M.*

II. Die Prozente, welche erwartet werden konnten, waren $\frac{23\,010}{37\,580} \times 100 = 61,23\%$.

III. Wenn 4% weniger gerechnet werden mußten, so konnte man auf 57,23% hoffen.

IV. Der angeführte Gläubiger erhielt voraussichtlich $790 \times \frac{57,23}{100} = 452,11$ *M.*

Antwort: Der Gläubiger hat **452,11 *M.*** zu erwarten.

5. Oberpfalz. 1882.

Die Brenngüte des Buchenholzes verhält sich zu der des Föhrenholzes wie 4 : 3 ; wie viele Kubikmeter Föhrenholz hat man nötig, um 100 Kubikmeter Buchenholz, und wie viele Kubikmeter Buchenholz, um 100 Kubikmeter Föhrenholz zu ersetzen?

Lösung.

Die Mengen der einander ersetzenden Holzarten verhalten sich umgekehrt, wie ihre Brenngüten. Bezeichnet F die Menge des Föhrenholzes, welche nötig ist, um eine bestimmte Menge Buchenholz (B) zu ersetzen, so ist

$$F : B = 4 : 3$$

$$a) \quad F : 100 = 4 : 3$$

$$F = 133\frac{1}{3} \text{ Kubikmeter Föhrenholz}$$

$$b) \quad 100 : B = 4 : 3$$

$$B = 75 \text{ Kubikmeter Buchenholz}$$

Antwort: Um 100 Kubikmeter Buchenholz zu ersetzen, sind **133 $\frac{1}{3}$ Kubikmeter** Föhrenholz nötig; dagegen werden 100 Kubikmeter Föhrenholz durch **75 Kubikmeter** Buchenholz ersetzt.

5. Oberpfalz. 1892.

3 Zentner Flachsstengel geben 1 Zentner trockene = 66 Pfd. geröstete Stengel = 36 Pfd. gebrochenen = 14 Pfd. geschwungenen Flachs und 15 Pfd. Werg. Auf 1 ha kann man 260 Zentner grünen Flachs ernten. a) Wie groß ist der Rohertrag nach diesem Verhältnisse auf 1 bayer. Tagwerk (34 a 7 qm), wenn 1 Pfd. Schwingflachs 72 ₤ und 1 Pfd. Werg 35 ₤ kostet? b) Wie hoch beläuft sich der gesamte Rohertrag (per Tagwerk), wenn auf 17 Zentner trockene Stengel 3 $\frac{1}{2}$ Zentner Körner à 16 M gerechnet werden? (Überall 2 Dezimalen; Dezimalen mit 0,5 und darüber werden bei unbedeutenden Werten als Einheit der nächst höheren Stelle behandelt. — Blieb hier unbeachtet.)

Lösung.

A. I. Auf 1 a werden 2,6 Zentner grüner Flachs geerntet, folglich auf 1 Tagwerk $34,07 \times 2,6 = 88,582$ Zentner.

II. Dieser grüne Flachs gibt $\frac{88,582}{3} \times 14 \text{ Pfd.} = 413,382 \text{ Pfd.}$

geschwungenen Flachs und $\frac{88,582}{3} \times 15 = 442,91 \text{ Pfd. Werg.}$

III. Die Einnahmen für den Flachs und das Werg sind:

$$413,382 \times 0,72 + 442,91 \times 0,35 = 452,65 \text{ M.}$$

B. I. Die Menge der gerösteten Stengel beträgt:

$$\frac{88,582}{3} = 29,527 \text{ Zentner.}$$

II. Diesen entsprechen Körner

$$\frac{29,527}{17} \times 3\frac{1}{2} = 6,07955 \text{ Zentner.}$$

III. Der Erlös hierfür macht

$$6,07955 \times 16 = 97,27 \text{ M.}$$

C. Der gesamte Rohertrag beläuft sich auf $452,65 + 97,27 = 549,92 \text{ M.}$

Antwort: Der Rohertrag ohne Leinsamen berechnet sich auf **452,65 M.**,
und mit Körnern auf **549,92 M.**

1. Oberpfalz. 1885.

Ein Gutsbesitzer hat durch einen Vertrag einem Schäfer gegenüber sich verpflichtet, 425 Schafe des letzteren 8 Wochen lang auf seiner Besetzung weiden zu lassen. Der Schäfer schickte aber mit Bewilligung des Gutsherrn anfangs nur 280 Schafe, nach 3 Wochen weitere 100 Stück und nach weiteren 2 Wochen abermals 70 Stück auf die Weide. Wie lange muß der Gutsherr den Weidebetrieb dieser 450 Schafe gestatten, wenn er seine eingegangene Verpflichtung erfüllen soll?

1. Lösung.

Bezeichnet die Weide 1 Schafes während 1 Woche 1 Fütterungseinheit, so hat der Gutsherr $425 \times 8 = 3400$ solcher Einheiten verkauft. Der Schäfer hat erhalten: $280 \times 3 + 380 \times 2 + 450 \times x$. Hiernach ist

$$280 \times 3 + 380 \times 2 + 450 \times x = 3400$$

$$x = 4 \text{ Wochen.}$$

2. Lösung.

Der Schäfer hatte 3400 Fütterungseinheiten zu fordern. Nach 3wöchentlicher Weide von 280 Schafen hatte er noch $3400 - 280 \times 3 = 2560$ Einheiten zu beanspruchen. Als hierauf 380 Schafe 2 Wochen lang geweidet hatten, verblieben dem Schäfer noch $2560 - 2 \times 380 = 1800$ Fütterungseinheiten für 450 Schafe, also für jedes Schaf 4. Somit konnten die Schafe nach dem Zutrieb von 70 Stück noch **4 Wochen** lange weiden.

Antwort: Der Gutsherr mußte den Weidebetrieb noch **4 Wochen** lang gestatten.

1. Unterfranken. 1895.

Von einem Stück Zeug, das 80 m hält, verkauft jemand einen Teil mit Gewinn von 30 ₤ auf 1 m; der Rest mußte mit 25 ₤

Verlust per m abgegeben werden, und es beträgt der Gewinn bei dem ganzen Geschäft 10,80 *M.* Wie viele Meter wurden mit Gewinn und wie viele mit Verlust verkauft?

1. Lösung.

- I. Wären sämtliche 80 m mit Gewinn verkauft worden, so hätte dieser 24 *M.* betragen; er betrug 13,20 *M.* weniger.
- II. Bei jedem m, das mit 25 *§* Verlust verkauft wurde, betrug die Einnahme 55 *§* weniger.
- III. Die mit Verlust verkaufte Anzahl m war $\frac{13,20}{5} = 24$ m, die mit Gewinn verkaufte Anzahl 56 m.

2. Lösung.

Bei x mit Gewinn verkauften Metern wurden $0,3x$ *M.* gewonnen; bei $(80 - x)$ mit Verlust verkauften Metern wurden $(80 - x) \times \frac{1}{4} = (20 - \frac{x}{4})$ *M.* verloren. Der Überschuß an Gewinn ist

$$0,3x - (20 - 0,25x) = 10,80$$

$$0,55x = 30,80$$

$$x = \frac{30,80}{0,55} = 56 \text{ m mit Gewinn, } 24 \text{ m mit Verlust.}$$

Antwort: Es wurden 56 m mit Gewinn und 24 m mit Verlust verkauft.

1. Oberbayern. 1892.

Ein Kapitalist gibt zu einem Unternehmen eine gewisse Summe. Im ersten Jahre gehen 5% verloren. Das so verminderte Kapital läßt er noch ein Jahr stehen, und es werden jetzt 5% gewonnen. Den Gewinn schlägt er zum Kapital und läßt dasselbe noch ein drittes Jahr stehen, in welchem 8% gewonnen werden. Nun erhält er an Kapital und Gewinn 16 159 *M.* 50 *§*. Wie groß war seine Einlage?

1. Lösung.

- I. Am Ende des zweiten Jahres betrug das Guthaben $\frac{16159,5 \times 100}{108} = 14962,50$ *M.*
- II. Am Ende des ersten Jahres war das Guthaben $\frac{14962,5 \times 100}{105} = 14250$ *M.*
- III. Am Anfang des ersten Jahres war die Einlage $\frac{14250 \times 100}{95} = 15000$ *M.*

2. Lösung.

Bezeichnet x *M.* die Einlage, so ist das Guthaben am Ende des ersten Jahres $y = 0,95x$, am Ende des zweiten Jahres $z = 1,05y = 1,05 \times 0,95x$ und am Ende des dritten Jahres $s = 1,08z = 1,08 \times 1,05 \times 0,95x$. Somit ist

$$1,08 \times 1,05 \times 0,95x = 16159,5$$

$$x = 15000 \text{ *M.*}$$

Antwort: Die Einlage betrug 15 000 *M.*

1. Niederbayern. 1882.

Das Gehalt eines jungen Mannes wurde erst um 25%, der nunmehrige Bezug wieder um 21% und 104,65 *M.* erhöht*), so daß es jetzt 655,20 *M.* beträgt. a) Wie groß war der anfängliche Bezug? b) Um wie viel Prozent ist er im ganzen erhöht worden?

1. Lösung.

A. Ohne die Zulage von 104,65 *M.* betrug der Bezug nach der Erhöhung um 21% $655,20 - 104,65 = 550,55$ *M.* Vor der Erhöhung um 21% war derselbe $\frac{550,55}{121} \times 100 = 455$ *M.* Der anfängliche Bezug berechnet sich zu $\frac{455 \times 100}{125} = 364$ *M.*

2. Lösung.

A. Das ursprüngliche Gehalt sei x , dann ist der um 25% erhöhte Bezug $1,25x$ und der nochmals um 21% erhöhte letzte Bezug $1,21 \times 1,25x$. Wird die Zulage addiert, so wird

$$1,21 \times 1,25x + 104,65 = 655,20$$

$$1,5125x = 655,20 - 104,65$$

$$x = \frac{550,55}{1,25 \times 1,21} = 364 \text{ } M.$$

B. Die gesamte Erhöhung des Gehalts betrug $655,20 - 364 = 291,2$ *M.*

oder $\frac{291,2}{364} \times 100 = 80\%$.

Antwort: a) Der anfängliche Bezug betrug **364** *M.* b) Dieser wurde im ganzen um **80 Prozent** erhöht.

1. Niederbayern. 1884.

Es kauft jemand ein Grundstück um 14000 *M.* und bezahlt es mit drei Obligationen, deren Werte sich wie 3:4:5 zu einander verhalten, und von denen die erste $3\frac{1}{2}$ prozentig, die zweite 4prozentig und die dritte $4\frac{1}{2}$ prozentig ist. Da der halbjährige Zins der Obligationen schon fällig ist, bekommt er 694 *M.* heraus. Welchen Wert hat jede Obligation ohne Rücksicht auf den Kurs?

1. Lösung.

Der Wert der drei Obligationen mit den halbjährigen Zinsen war 14694 *M.* Bezeichnet $3x$, $4x$ und $5x$ den Wert der einzelnen Obligationen, so ist

*) In der Beilage zu Nr. 8 der Bayer. Lehrer-Zeitung 1883 ist als Zulage 108,115 *M.* und als gesamter Bezug 626,60 *M.* angegeben.

$$\left(3x + \frac{3x \times 3,5}{2 \times 100}\right) + (4x + 4x \times \frac{4}{200}) + \left(5x + 5x \times \frac{4,5}{200}\right) = 14694 \text{ M.}$$

$$2449x = 14694 \times 200 \text{ M.}$$

$$x = 6 \times 200 \text{ M.}$$

Antwort: Der Wert der Obligationen war **3600 M.**, **4800 M.** u. **6000 M.**

2. Lösung.

Je 4800 M. Obligationen hatten mit Zins den Wert $(1200 + 21) + (1600 + 32) + (2000 + 45) = 4898$. Hieraus berechnet sich, daß der Nominalwert der Obligationen $\frac{14694}{4898} \times 4800 = 14400 \text{ M.}$ war. Hievon treffen auf die erste Obligation $\frac{14400 \times 3}{12} = \mathbf{3600 \text{ M.}}$, auf die zweite **4800 M.**, auf die dritte $\frac{14400 \times 5}{12} = \mathbf{6000 \text{ M.}}$

1. Oberbayern. 1889.

In einem Eisenbahnzuge befanden sich 295 Personen und zwar verhielt sich die Anzahl der Reisenden der ersten Klasse zu der der zweiten Klasse wie 3 : 4 und die der zweiten Klasse zu derjenigen der dritten Klasse wie 5 : 6. Zwei Billete der zweiten Klasse kosteten so viel wie 3 Billete der dritten Klasse und 1 Billet der ersten Klasse das $1\frac{1}{2}$ fache eines Billetes der zweiten Klasse. Für sämtliche Billete wurden 2808 M. gelöst. Wie viele Reisende waren in jeder Klasse und wie viel kostete je ein Billet?

1. Lösung.

- I. Die Anzahl der Personen in den drei Klassen verhielten sich wie 15 : 20 : 24. Demnach waren in der 1. Klasse $\frac{295}{59} \times 15 = \mathbf{75 \text{ Reisende}}$, in der 2. Klasse $5 \times 20 = \mathbf{100 \text{ Reisende}}$, in der 3. Klasse $5 \times 24 = \mathbf{120 \text{ Reisende}}$.
- II. Die Kosten der Billeten in den drei Klassen verhielten sich wie 9 : 6 : 4. Die nach diesen Verhältnissen bezahlten Gebühren verhielten sich wie $9 \times 75 : 6 \times 100 : 4 \times 120 = 225 : 200 : 160$. Die Summe, welche für die Billeten 2. Klasse bezahlt worden ist, beträgt $\frac{2808}{59} \times 200 = 4,8 \times 200 \text{ M.}$. Da 100 Billeten gelöst wurden, kostete 1 Billet $4,8 \times 2 = \mathbf{9,6 \text{ M.}}$. Es kostete dann 1 Billet 1. Klasse $9,6 \times \frac{3}{2} = \mathbf{14,4 \text{ M.}}$ und 1 Billet 3. Klasse $9,6 \times \frac{2}{3} = \mathbf{6,40 \text{ M.}}$

2. Lösung.

- I. Wenn in der 1. Klasse x Reisende sich befanden, so waren in der 2. Klasse $\frac{4}{3}x$ und in der 3. Klasse $\frac{4}{3}x \times \frac{5}{6}$, so daß

$$x + \frac{4}{3}x + \frac{24}{15}x = 295$$

$$\frac{59}{15}x = 295$$

$$x = 5 \times 15 = 75 \text{ Personen in der 1. Klasse.}$$

$$100 \quad \text{„} \quad \text{„} \quad \text{„} \quad 2. \quad \text{„}$$

$$120 \quad \text{„} \quad \text{„} \quad \text{„} \quad 3. \quad \text{„}$$

II. Wenn 1 Billet 1. Klasse y $\mathcal{M}$ kostete, so kostete 1 Billet 2. Klasse $\frac{2}{3}y$ und 3. Klasse $\frac{4}{9}y$. Im ganzen wurden bezahlt

$$75y + 100 \times \frac{2}{3}y + 120 \times \frac{4}{9}y = 2808$$

$$\frac{225}{3}y + \frac{200}{3}y + \frac{160}{3}y = 2808$$

$$585y = 2808 \times 3$$

$$y = \frac{2808}{195} = 14,4 \mathcal{M} \text{ für 1 Billet 1. Klasse}$$

$$9,6 \mathcal{M} \quad \text{„} \quad \text{„} \quad 2. \quad \text{„}$$

$$6,4 \mathcal{M} \quad \text{„} \quad \text{„} \quad 3. \quad \text{„}$$

Antwort: Die Zahl der Reisenden war: 75 in der 1. Klasse, 100 in der 2. Klasse, 120 in der 3. Klasse; es kostete 1 Billet 14,40 $\mathcal{M}$ in der 1. Klasse, 9,60 $\mathcal{M}$ in der 2. Klasse, 6,40 $\mathcal{M}$ in der 3. Klasse.

1. Niederbayern. 1890.

Bei einem Bankett wurden 2 Dutzend Flaschen Wein getrunken, teils zu $4\frac{1}{2}$ $\mathcal{M}$, teils zu 5 $\mathcal{M}$ per Flasche. Hätten sich am Festessen 3 Herren mehr beteiligt, so wäre das trockene Couvert dem einzelnen um 50 $\mathcal{S}$ billiger berechnet worden; statt der wirklichen 36 $\mathcal{M}$ wären dann für das Essen allein im ganzen 37,50 $\mathcal{M}$ zu zahlen gewesen. Wenn die Festteilnehmer außerdem von dem billigeren Wein um 32 $\mathcal{M}$ mehr getrunken haben, als von dem teureren, welche Summe war dann überhaupt für die ganze Bewirtung zu entrichten?

1. Lösung.

I. Da schon bekannt ist, was das Essen gekostet hat, so ist nur noch zu suchen, was für den Wein bezahlt worden ist. Wären von jeder Sorte 12 Flaschen getrunken worden, so wären für den teureren 6 $\mathcal{M}$ mehr zu entrichten gewesen. Es wurden aber für den teureren $6 + 32 = 38 \mathcal{M}$ weniger bezahlt. Für jede Flasche der wohlfeileren Sorte, welche an die Stelle einer besseren gestellt wurde, betrug der Unterschied $5 + 4\frac{1}{2} = 9\frac{1}{2} \mathcal{M}$. Demnach wurden $38 : 9\frac{1}{2} = 4$ Flaschen des billigeren Weines an die Stelle von 4 Flaschen des besseren genommen; also wurden 8 Flaschen zu 5 $\mathcal{M}$ und 16 Flaschen zu $4\frac{1}{2} \mathcal{M}$ getrunken. Dieselben kosteten $8 \times 5 + 16 \times 4,5 = 112 \mathcal{M}$.

II. Für die Bewirtung wurden $36 + 112 = 148 \mathcal{M}$ bezahlt.

2. Lösung.

Bezeichnet x die Anzahl der Flaschen des billigeren Weines, so ist

$$4,5 x = 5 (24 - x) + 32$$

$$x = 16 \text{ Flaschen des billigeren Weines}$$

$$8 \text{ Flaschen à } 5 \text{ M.}$$

Antwort: Für die Bewirtung wurden $32 + 16 \times 4,5 + 8 \times 5 = 148 \text{ M.}$ bezahlt.

Hiemit ist die Frage beantwortet. Die weiteren Angaben in der Aufgabe dienen dazu, die Anzahl der Teilnehmer zu berechnen. Wird diese mit x bezeichnet, so ist der Preis für das trockene Couvert

à Person entweder $\frac{36}{x}$ oder $\frac{37,5}{x+3} + \frac{1}{2}$. Folglich ist

$$\frac{1}{2} + \frac{75}{2(x+3)} = \frac{36}{x}$$

$$x^2 + 3x + 75x = 72x + 216$$

$$x^2 + 6x = 216$$

$$x^2 + 6x + 9 = 225$$

$$x + 3 = 15$$

$$x = 12 \text{ Teilnehmer.}$$

2. Oberbayern. 1887.

Die Arbeiter A, B und C verdienten miteinander die Summe von 960 M. Da diese Summe in drei verschiedenen Beträgen und von drei verschiedenen Kassen ausbezahlt wurden, holte nach Beendigung der Arbeit jeder Arbeiter einen der Beträge. Nach Verabredung treffen sie dann zusammen, um die ganze Summe Geldes wegen der gleichwertigen Arbeitsleistung auch gleichmäßig unter sich zu teilen. Zu diesem Zwecke gibt A, der den größten Betrag in Empfang genommen hat, soviel an B und C, als jeder schon hatte; auf die nämliche Art teilt hierauf B mit A und C und hernach C mit A und B. Auf diese Art ist die beabsichtigte Teilung wirklich bewerkstelligt worden, und es fragt sich nun, wie viel Geld jeder Arbeiter an der Kasse ausbezahlt erhalten hat?

1. Lösung.

Da A und B bei der letzten Teilung erhielten, was sie schon hatten, und am Schlusse je 320 M. besaßen, so hatten vor der dritten Teilung

$$A \text{ } 160 \text{ M., } B \text{ } 160 \text{ M. und } C \text{ } 640 \text{ M.}$$

Bei der zweiten Teilung erhielt A und C, was sie vorher hatten; demnach hatten sie vor der zweiten Teilung

$$A \text{ } 80 \text{ M., } B \text{ } 560 \text{ M. und } C \text{ } 320 \text{ M.}$$

Bei der ersten Teilung erhielten B und C, was sie vor der Teilung hatten; somit hatte vor der ersten Teilung

A 520 *M.*, B 280 *M.* und C 160 *M.*

2. Lösung.

A habe bei der Empfangnahme x *M.*, B y *M.* und C z *M.* erhalten, dann hatte

nach der 1. Teilung	A	$x - y - z$	B	$2y$	C	$2z$
nach der 2. Teilung	A	$2x - 2y - 2z$	B	$3y - x - z$	C	$4z$
nach der 3. Teilung	A	$4(x - y - z)$	B	$2(3y - x - z)$	C	$7z - x - y$

Gemäß der Angabe ist

	I	$4(x - y - z) = 320$
	II	$2(3y - x - z) = 320$
	III	$-x - y + 7z = 320$
IV = I : 4		$x - y - z = 80$
V = II : 2		$-x + 3y - z = 160$
III		$-x - y + 7z = 320$
VI = IV + V		$2y - 2z = 240$
VII = IV + III		$-2y + 6z = 400$
VIII = VI + VII		$4z = 640$
		$z = 160 \text{ } M.$
		$y = 280 \text{ } M.$
		$x = 520 \text{ } M.$

Antwort: A hatte 520 *M.*, B 280 *M.* und C 160 *M.* empfangen.

3. Oberpfalz. 1883.

Jemand erhält für sein Anwesen folgende Angebote: A bietet 63 000 *M.*, sogleich bezahlbar; B bietet 64 000 *M.*, von denen 38 500 *M.* sogleich und 25 500 *M.* nach 6 Monaten zahlbar sind; C bietet 66 300 *M.*, von denen die Hälfte nach 6 Monaten und die andere Hälfte nach 12 Monaten zahlbar ist. Welches von diesen drei Angeboten ist für den Verkäufer das vorteilhafteste? Um wie viel übertrifft der gegenwärtige Wert der in diesem Angebote enthaltenen Zahlungen den gegenwärtigen Wert der in den anderen Angeboten inbegriffenen Zahlungen, wenn 4% als landesüblicher Zinsfuß gilt?

Lösung.

Um die Werte der drei Angebote mit einander zu vergleichen, kann man die Zahlungen, welche für spätere Zeiten versprochen werden, diskontieren, oder man kann die verschiedenen Summen auf einen gleichen Termin prolongieren. Mit Rücksicht auf die zweite Frage wird man diskontieren.

- I. Barwert des Angebotes von A $\quad\quad\quad = 63\,000 \text{ M.}$
 II. Barwert des Angebotes von B $38\,500 + 255 \times 98 \quad = 63\,490 \text{ M.}$
 III. Barwert des Angebotes von C $331,5 \times 98 + 331,5 \times 96 = 64\,311 \text{ M.}$
 Antwort: Das vorteilhafteste Angebot ist dasjenige des C. Der Barwert desselben ist um **1311 M.** größer als derjenige des Angebotes des A und um **821 M.** größer als der Barwert des Angebotes von B.

1. Niederbayern. 1886.

Wer gewinnt mehr Prozente? A macht Börsengeschäfte. Das erste Mal verhält sich sein Gewinn zum Kapital wie 1:16, das zweite Mal gewinnt er 2210 M., das dritte Mal verhält sich sein Kapital zum Gewinn wie 10:1. Jedesmal wird der Gewinn zum Kapital geschlagen, so daß sich schließlich eine Summe von 31 603 M. ergibt. — B kauft 800 m Zeug à 60 ₤; er verkauft das Meter zum Fabrikpreis, bekommt infolge Baarzahlung vom Fabrikanten 20% Diskonto und gibt seinen Kunden bei Barzahlung 4% Diskonto.

Lösung.

A. Um die Prozente zu finden, welche A gewinnt, muß zunächst das Kapital berechnet werden, welches er anfänglich hatte. Diese Berechnung kann in zweierlei Weise (a und b) geschehen.

a. I. Bei dem dritten Geschäfte hat er $\frac{1}{10}$ seines vorherigen Besitzes gewonnen. Dieser betrug daher nach dem Geschäfte $\frac{11}{10}$ des vorherigen Besitzes. Somit war letzterer $\frac{31\,603 \times 10}{11}$
 $= 28\,730 \text{ M.}$

II. Vor dem zweiten Geschäfte betrug das Kapital $28\,730 - 2210$
 $= 26\,520 \text{ M.}$

III. Da bei dem ersten Geschäfte $\frac{1}{16}$ des anfänglichen Kapitals gewonnen wurde, so war dieses $\frac{26\,520 \times 16}{17} = 1560 \times 16$
 $= 24\,960 \text{ M.}$

IV. A hat gewonnen $31\,603 - 24\,960 = 6643 \text{ M.}$

V. Der Gewinn des A in Prozenten ist $\frac{6\,643\,00}{24\,960} = 26,61\%$.

b. I. Das anfängliche Kapital des A sei x, dann ist es nach dem ersten Geschäfte $\frac{17x}{16}$, nach dem zweiten Geschäfte

$(\frac{17}{16}x + 2210)$ und nach dem dritten $\frac{11}{10} \left(\frac{17x}{16} + 2210 \right)$.

Somit ist $\frac{11}{10} \left(\frac{17x}{16} + 2210 \right) = 31\,603$

$x = 24\,960 \text{ M.}$

II. Der Gewinn ist (wie oben) **26,61 %**.

B. Die Prozente, welche B gewonnen hat, werden wie folgt berechnet:

I. Die Faktura (Rechnung) lautete: $60 \times 8 = 480 \text{ M.}$ mit 20% Diskonto bei Barzahlung.

II. Barzahlung, d. i. Auslage des B $= \frac{4}{5} \times 480 = 384 \text{ M.}$

III. Die Rechnungen für die Kunden lauteten: 480 M. mit 4% Diskonto bei Barzahlung.

IV. Die Einnahmen betrugen $\frac{24}{25} \times 480 = 96 \times 4,8 = 460,80 \text{ M.}$

V. Der Gewinn des B betrug $460,80 - 384,00 = 76,80 \text{ M.}$

VI. Der Gewinn des B in Prozenten war $\frac{76,80}{384} = 20\%$.

C. Es hat A um 6,61% mehr gewonnen.

3. Schwaben. 1888.

Ein Kapital wächst in 10 Monaten mit den Zinsen auf 5250 M. und in 18 Monaten auf 5450 M. Wie groß ist das Kapital und zu wie viel Prozent ist es ausgeliehen?

Lösung.

I. Die Zinsen für 8 Monate betragen 200 M., für 1 Monat 25 M., für 10 Monate 250 M.

II. Da Kapital und 10monatlicher Zins 5250 M. sind, der Zins aber 250 M. betrug, so war das Kapital 5000 M.

III. Wenn 5000 M. Kapital in 1 Monat 25 M. Zins tragen, so bringen 100 M. in 1 Monat $\frac{1}{2}$ M. und in 1 Jahr 6 M.

Antwort: Das Kapital ist 5000 M., der Zinsfuß 6%.

4. Oberpfalz. 1886.

Ein Unternehmen hatte einen Kapitalaufwand von 62500 M. erfordert. Mit diesem Kapital hätte ein Gewinn von 14% erzielt werden können, wenn nicht kurz vor Ablauf des ersten Geschäftsjahres ein Posten von 3750 M. verloren gegangen wäre. Wie viel Prozent warf das Unternehmen im ersten Jahre ab?

Lösung.

I. Der Gewinn war $62500 \times \frac{14}{100} - 3750 = 5000 \text{ M.}$

II. Die Prozente (x) im ersten Jahre waren $x = \frac{5000}{62500} \times 100 = 8\%$.

Antwort: Das Kapital warf im ersten Jahre 8% ab.

4. Oberpfalz. 1883.

Ein Kapital erträgt jährlich 273 M. Zinsen, würde aber, um $1\frac{2}{3}\%$ niedriger ausgeliehen, in der gleichen Zeit nur 182 M. Zinsen tragen. Wie groß ist das Kapital und zu wie viel Prozent ist es ausgeliehen?

Lösung.

- I. Je $1\frac{2}{3}$ $\mathcal{M}$ Zinsenminderung entspricht 100 $\mathcal{M}$ Kapital. Die gesamte Minderung der Zinsen beträgt 91 $\mathcal{M}$. Folglich war das Kapital $9100 : \frac{5}{3} = 5460$ $\mathcal{M}$.
- II. Der Zins für je 100 $\mathcal{M}$ oder die Prozente waren $\frac{273}{5460} \times 100 = 5\%$, wären aber bei $1\frac{2}{3}\%$ niedrigerem Zinsfuß $3\frac{1}{3}\%$ gewesen.
- Antwort: Das Kapital war 5460 $\mathcal{M}$ und war zuerst zu 5% ausgeliehen.

1. Unterfranken. 1882.

Jemand hat ein Schwein, das ihm 25 $\mathcal{M}$ kostet, gemästet und dazu außer den Abfällen der Haushaltung 6 hl Kartoffeln à 3,20 $\mathcal{M}$ und $4\frac{1}{2}$ hl Getreide à 11 $\mathcal{M}$ verbraucht. Das Schlächtergewicht betrug 195 Pfund. Wenn nun auf den Speck 45% des Schlächtergewichtes gerechnet werden und das Pfund Speck 0,82 $\mathcal{M}$, dagegen das Pfund vom übrigen 0,70 $\mathcal{M}$ gilt, wie viel Prozent hat das ausgelegte Geld als Vergütung für Abfälle, Wartung etc. eingebracht?

Lösung.

I. Ausgaben:	a) Einkauf des Schweines	25,00 $\mathcal{M}$	
	b) Kartoffeln $3,20 \times 6$	= 19,20 $\mathcal{M}$	
	c) Getreide $4,50 \times 11$	= 49,50 $\mathcal{M}$	
			93,70 $\mathcal{M}$
II. Einnahmen:	a) Speck $0,82 \times 195 \times 0,45$	= 71,955 $\mathcal{M}$	
	b) Übriges $0,70 \times 195 \times 0,55$	= 75,075 $\mathcal{M}$	
			147,03 $\mathcal{M}$
III. Gewinn			53,33 $\mathcal{M}$
IV. Gewinn in Prozenten:	$93,70 : 53,33 = 100 : x$		
	$x = \frac{5333}{937} = 56,92\%$		

Antwort: Das ausgelegte Geld hat 56,92% eingebracht.

1. Oberfranken. 1883.

Von einer Stipendienstiftung waren seither $\frac{4}{5}$ des Fundationskapitales zu 4% und $\frac{1}{5}$ zu $3\frac{1}{2}\%$ angelegt. Infolge der Reduktion des Zinsfußes auf 3% mußte jedes von 6 gleichen Stipendien, wozu der jährliche Zinsertrag bestimmt war, um 15 $\mathcal{M}$ vermindert werden. Wie groß ist das Kapital und wie groß war (ursprünglich) jedes Stipendium?

Lösung.

A. I. Die ganze Verminderung betrug $6 \times 15 = 90 \text{ M.}$

II. Die Teilvermindierungen betrugen für je 1000 M. Fundationskapital:

a) für 800 M. 8 M.

b) für 200 M. 1 M.

Summa 9 M.

III. Da die Zinsen von je 1000 M. um 9 M. sich verminderten, die ganze Verminderung aber 90 M. betrug, so war das Fundationskapital $\frac{90}{9} \times 1000 = 10\,000 \text{ M.}$

B. I. Es brachten ursprünglich 10 000 M. Kapital $8000 \times \frac{4}{100} + 2000 \times \frac{3,5}{100} = 320 + 70 = 390 \text{ M. Zinsen.}$

II. Jedes Stipendium betrug $390 : 6 = 65 \text{ M.}$

Antwort: Das Fundationskapital war 10 000 M. groß und jedes Stipendium betrug anfangs 65 M.

3. Oberbayern. 1889.

Von einer Summe erhält A 5 M. mehr als den 4. Teil; B bekommt 6 M. mehr als den 5. Teil und C 20 M. mehr als $\frac{3}{7}$ der Summe, und es erhält daher C ebensoviel wie A und B zusammen. Wie groß ist die Summe? Wie viel erhält jede der drei Personen, und wie viel bleibt übrig?

1. Lösung.

I. A und B erhalten $\frac{1}{4} + \frac{1}{5} = \frac{9}{20}$ der Summe und 11 M. C erhält $\frac{3}{7}$ der Summe und 20 M. Da aber die Anteile des A und B zusammen so groß sind, wie der Anteil des C so ist der Unterschied von $\frac{9}{20} - \frac{3}{7}$ der Summe 9 M. oder $\frac{3}{140}$ der Summe sind 9 M.; somit ist die zu verteilende Summe 420 M.

II. A erhält 110 M., B 90 M., C 200 M. und 20 M. bleiben übrig.

2. Lösung.

Wenn die zu verteilende Summe x M. beträgt, so erhält A $(\frac{x}{4} + 5)$, B $(\frac{x}{5} + 6)$ und C $(\frac{3}{7}x + 20)$. Entsprechend der Angabe ist

$$\frac{x}{4} + 5 + \frac{x}{5} + 6 = \frac{3}{7}x + 20$$

$$\frac{9}{20}x - \frac{3}{7}x = 9$$

$$\frac{3}{140}x = 9$$

$$x = 420 \text{ M.}$$

Antwort: A erhält 110 M., B 90 M., C 200 M. und 20 M. bleiben übrig.

2. Oberbayern. 1889.

Ein Kapitalist hat $\frac{2}{3}$ seines Vermögens in Aktien einer Versicherungsgesellschaft angelegt, welche am Schlusse des Jahres $8\frac{1}{2}\%$ Dividende verteilt. Mit dem Reste des Vermögens beteiligt er sich an einem Unternehmen, das mit $2\frac{1}{2}\%$ Verlust abschloß. Das gesamte Jahreseinkommen beträgt nun 3625 *M.*; wie groß ist sein Vermögen?

1. Lösung.

Je 600 *M.* des Vermögens bringen ein Einkommen von $8\frac{1}{2} \times 4 - 2\frac{1}{2} \times 2 = 29$ *M.* Demnach ist das Vermögen $\frac{3625}{29} \times 600 = 125 \times 600 = 75\,000$ *M.*

2. Lösung.

Bezeichnet x das gesuchte Vermögen, so ist der Ausdruck für das Einkommen $\frac{2}{3}x \times \frac{8,5}{100} + \frac{2x}{3} \times \frac{2,5}{100}$. Dieser Ausdruck hat den Wert 3625, daher ist

$$\begin{aligned} \frac{17x}{300} - \frac{5x}{600} &= 3625 \\ 29x &= 3625 \times 600 \\ x &= 75\,000 \text{ *M.*} \end{aligned}$$

Antwort: Das Vermögen beträgt 75 000 *M.*

1. Unterfranken. 1883. und 1. Oberbayern. 1884.

Jemand hat den dritten Teil seines Vermögens in Grundstücken, 25% desselben in Staatspapieren und den Rest in Aktien angelegt, welche ihm eine Jahresdividende von 6,25% abwerfen. Die Staatspapiere verzinsen sich zu 4,5%, und die Grundstücke rentieren sich zu 7%. Wie groß ist das Gesamtvermögen, wenn das jährliche Einkommen aus dem Ertrage 5092,50 *M.* beträgt?

1. Lösung.

Bezeichnet x das gesamte Vermögen, so ist $\frac{x}{3}$ in Grundstücken, $\frac{1}{4}x$ in Staatspapieren und $\frac{5}{12}x$ in Aktien angelegt, daher ist

$$\begin{aligned} \frac{1}{3}x \times \frac{7}{100} + \frac{1}{4}x \times \frac{4,5}{100} + \frac{5}{12}x \times \frac{6,25}{100} &= 5092,50 \text{ *M.*} \\ 28x + 13,5x + 31,25x &= 6111\,000 \text{ *M.*} \\ x &= 84\,000 \text{ *M.*} \end{aligned}$$

2. Lösung.

Von je 1200 *M.* Kapital brachten 400 *M.* jährlich 28 *M.* Rente, 300 *M.* Kapital 13,5 *M.* Rente und 500 *M.* Kapital 31,25 *M.* Rente.

Somit erhielt der Besitzer von je 1200 *M* Kapital jährlich 72,75 *M* Einkommen. Demnach betrug jenes

$$\frac{5092,50}{72,75} \times 1200 = 84\,000 \text{ } M.$$

Antwort: Das Vermögen betrug 84 000 *M*.

4. Oberpfalz. 1888.

Jemand will nach 3 Jahren an Kapital, Zinsen und Zinseszinsen 13 891 *M*. 50 *S* erheben. Welches Kapital muß er heute zu 5% anlegen?

1. Lösung.

I. Je 105 *M* am Ende des 3. Jahres sind 100 *M* am Ende des 2. Jahres; daher muß das Guthaben am Ende des zweiten Jahres betragen

$$\frac{13891,5 \times 100}{105} = 13\,230 \text{ } M.$$

II. In derselben Weise muß es am Ende des Jahres sein

$$\frac{13230}{105} \times 100 = 12\,600 \text{ } M.$$

III. Am Anfange mußten eingelegt werden $\frac{12600 \times 100}{105} = 12\,000 \text{ } M.$

2. Lösung.

I. Wenn *x* *M* eingelegt werden, so beträgt die Forderung am Ende des ersten Jahres $x + x \times \frac{5}{100} = 1,05 x = y.$

II. Am Ende des zweiten Jahres ist *y* zu $y + y \times \frac{5}{100} = 1,05 y = 1,05 \times 105 \times x = (1,05)^2 x = z$ angewachsen.

III. Am Ende des dritten Jahres gibt *z* *M*. die Summe $1,05 z = 105 \times (1,05)^2 x = (1,05)^3 x.$ Demgemäß ist

$$(1,05)^3 x = 13891,5$$

$$x = \frac{13891,5}{1,05 \times 1,05 \times 1,05} = \frac{13230}{1,05 \times 1,05} = \frac{12600}{1,05} = 12\,000 \text{ } M. \text{ oder}$$

$$x = \frac{13891,5}{1,157625} = 12\,000 \text{ } M.$$

Antwort: Es müssen 12 000 *M* angelegt werden.

1. Oberfranken. 1885.

640 *M* liegen 6 Monate in einer Sparkasse, welche zu 5% verzinst. Die Zinsen werden alle drei Monate zum Kapital geschlagen. Wie viele Mark würden bei einem Jahreszinsfuß von 3,6% und zwei-monatlichem Zuschlage in derselben Zeit auf die gleiche Summe anwachsen?

1. Lösung.

- A. I. Das Kapital 640 *M.* wächst nach 3 Monaten an zu $640 + 640 \times \frac{5}{100} \times \frac{1}{4} = 648$ *M.*
 II. Diese 648 *M.* werden nach weiteren 3 Monaten $648 + 648 \times \frac{5}{100} \times \frac{1}{4} = 656,10$ *M.*
 B. I. Bei 3,6% wachsen 100 *M.* in 2 Monaten an zu 100,6 *M.*, somit muß man, um 656,10 *M.* zu erhalten, $\frac{656,1}{100,6} \times 100 = 652,18$ *M.* angelegt haben.
 II. Abermals 2 Monate früher mußten $\frac{652,18}{100,60} \times 100 = 648,29$ *M.* angelegt worden sein.
 III. Nochmals 2 Monate früher war die Einlage $\frac{648,29}{100,60} \times 100 = 644,43$ *M.*

2. Lösung.

- A. 640 *M.* geben bei einer Verzinsung von $\frac{5}{4}\%$ für 3 Monate nach 6 Monaten mit Zinseszinsen $S = 640 \times (1,0125)^2 = 656,10$ *M.*
 B. x *M.* Kapital wachsen nach 6 Monaten bei einer zweimonatlichen Verzinsung zu 0,6 *M.* an zu $S = x \times (1,006)^3$. Daher

$$x \times (1,006)^3 = 656,1$$

$$x = \frac{656,1}{(1,006)^3} = 644,43$$
 M.

Antwort: **644,43** *M.* würden die verlangte Summe liefern.

3. Oberpfalz. 1892.

Ein Rentner hat sein Kapital zu $4\frac{1}{2}\%$ angelegt. Von den Zinsen nimmt er jährlich zu seinem Lebensunterhalte 3000 *M.* weg. Am Ende des zweiten Jahres findet er, daß sich trotz dieser Wegnahme sein Vermögen um 3067,50 *M.* vermehrt hat. Wie groß war sein Vermögen vor 2 Jahren?

1. Lösung.

- I. Wenn x *M.* angelegt worden waren, so betrugen am Ende des ersten Jahres das Kapital und die Zinsen $x + x \times \frac{4,5}{100} = x + \frac{9x}{200} = \frac{209x}{200}$
 II. Als hievon 3000 *M.* weggenommen waren, verblieben noch

$$\left(\frac{209x}{200} - 3000 \right) \text{ *M.*}$$

III. Dieser Rest brachte im zweiten Jahre $(\frac{209}{200}x - 3000) \frac{9}{100} =$
 $(\frac{1881x}{40000} - 135)$ $\mathcal{M}$. Zinsen, so daß nunmehr das Kapital und die
 Zinsen $\frac{209x}{200} - 3000 + \frac{1881x}{40000} - 135 = \frac{41800x + 1881x}{40000} - 3135$
 $= (\frac{43681x}{40000} - 3135)$ $\mathcal{M}$. ausmachten.

IV. Nachdem wieder 3000 $\mathcal{M}$. entnommen waren, betrug das Vermögen
 $x + 3067,5$; daher ist

$$\frac{43681x}{40000} - 3135 - 3000 = x + 3067,5$$

$$\frac{43681x - 40000x}{40000} = 9202,5$$

$$3681x = 9202,5 \times 40000$$

$$x = \frac{36810}{3681} \times 10000 = 100\,000 \mathcal{M}.$$

2. Lösung.

I. Am Ende des ersten Jahres betrugen Kapital und Zinsen $x +$
 $\frac{4,5x}{100} = 1,045x$.

II. Nach der Wegnahme von 3000 $\mathcal{M}$. verblieben $1,045x - 3000$.

III. Dieser Rest und dessen Zinsen am Ende des zweiten Jahres
 waren $1,045(1,045x - 3000) = (1,045)^2x - 3135$.

IV. Nachdem wieder 3000 $\mathcal{M}$. weggenommen waren, blieben

$$(1,045)^2x - 6135 = x + 3067,5$$

$$1,092025x - x = 9202,5$$

$$0,092025x = 9202,5$$

$$x = 100\,000 \mathcal{M}.$$

Antwort: Das Vermögen war 100 000 $\mathcal{M}$.

2. Unterfranken. 1883.

Eine unverzinsliche Schuld war vom 10. November 1878 ab nach
 Umlauf von 5 Jahren zu bezahlen. Schon am 10. Mai 1880 wurden
 1500 $\mathcal{M}$. und am 10. Februar 1882 weitere 2400 $\mathcal{M}$. abgetragen; der
 Rest von 3200 $\mathcal{M}$. wurde am 10. Oktober 1883 erlegt. Wie groß war
 die Schuld, angenommen, daß sich Kreditor und Debitor über einen
 5prozentigen Diskontfuß geeinigt hatten?

Lösung.

I. Die Schuld war am 10. Oktober 1883 fällig.

II. Die am 10. Mai 1880 bezahlten 1500 $\mathcal{M}$. wurden $2\frac{1}{2}$ Jahre früher
 abgetragen. Sie haben am 10. Oktober 1883 den Wert von
 $1500 + 1500 \times \frac{5}{100} \times \frac{5}{2} = 1687,50 \mathcal{M}$.

III. Die weiteren 2400 $\mathcal{M}$ wurden $1\frac{3}{4}$ Jahre vor dem Termine bezahlt, hatten daher einen Wert von $2400 + 2400 \times \frac{5}{100} \times \frac{7}{4} = 2610 \mathcal{M}$.

IV. Die auf den Zahlungstermin prolongierten Teilzahlungen betrugen $1687,50 \mathcal{M} + 2610 \mathcal{M} + 3200 \mathcal{M} = 7497,50 \mathcal{M}$.

Antwort: Die Schuldsomme betrug **7497,50 $\mathcal{M}$** .

1. Schwaben. 1886.

Von vier am 1. März ausgestellten Wechseln à 450 $\mathcal{M}$ ist der erste am 19. März, der zweite am 25. März, der dritte am 4. April und der vierte am 16. April fällig. An welchem Tage könnten sie gemeinsam bezahlt werden?

Lösung.

Vom 1. März an kann der erste Wechsel noch 18 Tage, der zweite 24 Tage, der dritte 33 Tage, der vierte 45 Tage laufen. Da die Summen einander gleich sind, so ist der mittlere Verfalltag $\frac{18 + 24 + 33 + 45}{4} = \frac{120}{4} = 30$ Tage nach dem 1. März, also (da jeder Monat zu 30 Tage gerechnet wird) der 1. April.

1. Schwaben. 1891.

Jemand soll an folgenden Terminen die mitbezeichneten Summen bezahlen: a nach m, b nach n, c nach p, d nach r und e nach s Monaten. Nach wie viel Monaten kann er die Summe $a + b + c + d + e$ ohne Nachteil für sich und den Gläubiger auf einmal entrichten?

Lösung.

Beträgt x Monate die mittlere Zeit, so muß

$$ax + bx + cx + dx + ex = am + bn + cp + dr + es$$

$$x = \frac{am + bn + cp + dr + es}{a + b + c + d + e} \text{ sein.}$$

Antwort: Nach $\left(\frac{am + bn + cp + dr + es}{a + b + c + d + e} \right)$ Monaten.

3. Schwaben. 1885. 2. Schwaben. 1891 und 1894.

Ein Wechsel wird mit 521,50 $\mathcal{M}$ bezahlt, nachdem bei 6% Diskonto ein Abzug von 3,50 $\mathcal{M}$ gemacht worden war. Wie viele Tage hätte derselbe bis zum Verfalltage noch laufen dürfen?

Lösung.

I. Die Wechselschuld war $521,50 \mathcal{M} + 3,50 \mathcal{M} = 525 \mathcal{M}$.

II. Der Jahresdiskonto würde $525 \times \frac{6}{100} = 31,50 \mathcal{M}$ betragen.

III. Die Zeit bis zum Verfalltage ist $\frac{3,50}{31,50}$ Jahre $= \frac{35 \times 360}{315} = \frac{35 \times 40}{35}$
 $= 40$ Tage.

Antwort: Der Wechsel hätte bis zum Verfalltage noch **40 Tage** laufen dürfen.

1. Oberpfalz. 1881.

Bei einem Gutskaufe verpflichtet sich jemand, nach 1 Jahre 4000 $\mathcal{M}$, nach 2 Jahren 3000 $\mathcal{M}$ und nach 3 Jahren 2000 $\mathcal{M}$ zu entrichten. Er bezahlt aber nach 1 Jahr 2000 $\mathcal{M}$, nach 2 Jahren 3000 $\mathcal{M}$ und bei Abtragung des Restes muß er bei 3% (p. a.) 120 $\mathcal{M}$ Verzugszinsen bezahlen. Wann ist der Rest abgetragen worden?

Lösung.

Nach 1 Jahre hat der Käufer 2000 $\mathcal{M}$ weniger bezahlt, als er verpflichtet war. Um keine Verzugszinsen zu bezahlen, hätte er im 2. Jahre die nach dem 3. Jahre fälligen 2000 $\mathcal{M}$ ein Jahr früher, dazu die schon im 1. Jahr fälligen 2000 $\mathcal{M}$ und die im 2. Jahre fälligen 3000 $\mathcal{M}$, im ganzen 7000 $\mathcal{M}$ bezahlen müssen. Es wurden aber im 2. Jahre nur 3000 $\mathcal{M}$ bezahlt und die übrigen 4000 $\mathcal{M}$ erst abgetragen, als die Verzugszinsen 120 $\mathcal{M}$ betrugen. Bei 3% berechnen sich für 4000 $\mathcal{M}$ Kapital 120 $\mathcal{M}$ Verzugszinsen nach 1 Jahre. Der Rest von 4000 $\mathcal{M}$ wurde somit **nach 3 Jahren** bezahlt, nämlich 1 Jahr nach dem 2. Jahre.

3. Oberbayern. 1895.

780 $\mathcal{M}$ sind nach einer gewissen Zeit zu bezahlen, $2\frac{7}{10}$ Monate später sind 960 $\mathcal{M}$ zu entrichten. Beide Kapitalien werden mit $4\frac{1}{2}\%$ Diskonto p. a. mit 1698,96 $\mathcal{M}$ bar erlegt. Wann war jedes Kapital fällig?

Lösung.

I. Es durften 960 $\mathcal{M}$ später bezahlt werden. Wäre diese Summe gleichzeitig mit 780 $\mathcal{M}$ fällig gewesen, so wäre der Diskonto um

$$960 \times \frac{4,5}{1200} \times \frac{27}{10} = 9,72 \text{ geringer gewesen.}$$

II. Der Diskonto wäre dann für $(780 + 960) = 1740$ $\mathcal{M}$ Schuld $1740 - 9,72 = 1698,96$ $\mathcal{M}$ gewesen.

III. Der monatliche Diskonto für 1740 $\mathcal{M}$ beträgt $1740 \times \frac{4,5}{1200} = 26,1$ $\mathcal{M}$.

IV. Hieraus berechnet sich die gemeinsame Umlaufszeit zu $31,32 : 26,1$
 $= \frac{31,32 \times 40}{261} = 0,12 \times 40 = 4,8$ Monate.

Antwort: Die erste Schuld war nach **4,8 Monaten**, die zweite nach $2,7 + 4,8 = 7,5$ Monaten fällig.

1. Niederbayern. 1895.

Jemand hat nach einer gewissen Zeit 670 *M* und $4\frac{1}{2}$ Monate später 980 *M* zu zahlen. Für beide Summen zahlt er sofort mit $4\frac{4}{5}\%$ Diskonto 1594,41 *M*. Nach wie viel Monaten sind beide Posten fällig?

Lösung.

- I. Die Schuldsomme betrug 1650 *M*, daher der Diskonto
 $1650 - 1594,41 \dots \dots \dots = 55,59 \text{ } M$
 - II. Wird von dem ganzen Diskonto der Teil, welcher
 auf 890 *M* für $4\frac{1}{2}$ Monate trifft, abgezogen, so
 bleibt der Diskonto für beide Summen in gleicher
 Verfallzeit. Der Diskonto für 980 *M* und $4\frac{1}{2}$ Monate
 ist $980 \times \frac{4,8}{100} \times \frac{4,5}{12} \dots \dots \dots = 17,64 \text{ } M$
 - III. Der Diskonto für beide Schuldsommen und gleiche
 Zeit ist $\dots \dots \dots = 37,95 \text{ } M$
 - IV. Der monatliche Diskonto für 1650 *M* beträgt 1650
 $\times \frac{4,8}{1200} \dots \dots \dots = 6,60 \text{ } M$
 - V. Je 6,60 *M* Diskonto entsprechen 1 Monat Zahlungs-
 termin; demnach ist die gemeinsame Verfallzeit
 $37,95 : 6,60 = 5\frac{3}{4}$ Monate.
- Antwort: Die erste Summe (670 *M*) war nach $5\frac{3}{4}$, die zweite Summe
 (980 *M*) nach $10\frac{1}{4}$ Monaten fällig.

1. Unterfranken. 1887.

Jemand ist 2000 *M*, 3000 *M* und 4000 *M* zu zahlen schuldig, und zwar in Zeiträumen, die sich wie 4:5:6 verhalten. Die ganze Schuld wird nach 10 Monaten auf einmal bezahlt. Wann war jede Summe fällig, wenn bei 18% Diskonto 8940 *M* bezahlt wurden?

Lösung.

- I. Die ganze Schuld ist 9000 *M*. Dieselbe wurde früher als zur
 mittleren Verfallzeit bezahlt, wofür 60 *M* Diskonto bewilligt wurden.
 - II. Der monatliche Diskonto für 9000 *M* beträgt $90 \times 1\frac{1}{2} = 135 \text{ } M$.
 - III. Die Verfallzeit war $60 : 135 = \frac{4}{9}$ Monate nach dem Zahltage d. h.
 sie betrug $10\frac{4}{9}$ Monate.
 - IV. Angenommen, die Verfallzeiten der einzelnen Summen wären 4, 5
 und 6 Monate gewesen, so wäre der mittlere Zahlungstermin
 $\frac{8 + 15 + 24}{9} = \frac{47}{9} = 5\frac{2}{9}$ Monate gewesen. Er war aber 2mal so groß.
- Antwort: 2000 *M* waren nach 8 Monaten, 3000 *M* nach 10 Monaten
 und 4000 *M* nach 12 Monaten fällig.

5. Oberbayern. 1894.

Jemand hat zwei Wechsel, von denen der eine auf 1455 *M.*, der andere auf 2400 *M.* lautet und 1 Monat nach jenem fällig ist. Er verkauft beide Wechsel und erhält dafür nach Abzug von 4% Diskonto und $\frac{1}{3}$ % Provision bar 3808,45 *M.* Wie viele Monate hat ein jeder Wechsel zu laufen?

Lösung.

I. Die Schuldsumme ist 2400 + 1455	= 3855,00 <i>M.</i>
II. Die Provision hievon beträgt	12,85 <i>M.</i>
III. Die empfangene Summe	2808,45 <i>M.</i>
	3821,30 <i>M.</i>
IV. Der Diskonto macht	33,70 <i>M.</i>
V. Der Diskonto für 2400 <i>M.</i> und 1 Monat ist	8,00 <i>M.</i>
VI. Der Diskonto für gemeinsame Umlaufszeit	25,70 <i>M.</i>
VII. Für 3855 <i>M.</i> ist der monatl. Diskonto $3855 \times \frac{4}{1200} =$	12,85 <i>M.</i>
VIII. Da der Diskonto für die gemeinsame Umlaufszeit 25,70 <i>M.</i> beträgt, so ist diese 2 Monate (da $25,70 : 12,85 = 2$).	

Antwort: Der erste Wechsel ist nach **2 Monaten**, der andere nach **3 Monaten** fällig.

3. Schwaben. 1887.

Berlin kauft am 3. Oktober 1350 Gulden 5prozentige Lotterie-Anleihe à 106 $\frac{1}{2}$ mit Coupons vom 1. Mai. Wie viel ist dafür zu bezahlen, wenn 1‰ Courtage und $\frac{1}{3}$ % Provision gerechnet werden?

Lösung.

I. Kursbetrag: 13,5 Stücke à 106,5	= 1437,75 Gulden
II. Zins für 152 Tage $\frac{13,5 \times 5 \times 152}{360} = \frac{1,5 \times 5 \times 38}{10} =$	28,50 „
III. Courtage (Bezahlung für den Makler)	
	$1466,25 : 1000 =$
	1,46 „
IV. Provision $1467,91 : 300$	$=$
	4,89 „
	1472,60 Gulden.

Antwort: Es waren **1472,60** Gulden zu bezahlen.

3. Oberbayern. 1885.

Ein Advokat diktiert ein längeres Konzept zuerst einem Schreiber, der in der Minute 40 Worte schreibt. Als dieser ermüdet, ließ er einen Stenographen dafür eintreten, der 80 Worte in der Minute zu schreiben vermag. Um das Diktat rasch zum Abschlusse zu bringen, rief er

seinen geübtesten Stenographen herbei, der 120 Worte in der Minute schreibt. Im ganzen diktiert der Advokat 3 Stunden 40 Minuten. Wie lange schrieb jeder, wenn jedem ein gleich großes Stück des Konzeptes diktiert worden ist.

1. Lösung.

Der erste Schreiber sei x Minuten, der zweite y Minuten und der dritte z Minuten beschäftigt gewesen, dann ist

$$\begin{array}{ll} \text{I.} & x + x + z = 220 \\ \text{II.} & 40 x = 80 y \\ \text{III.} & 40 x = 120 z \end{array}$$

$$x + \frac{x}{2} + \frac{x}{3} = 220$$

$$x = 120 \text{ Minuten}$$

$$y = 60 \text{ Minuten}$$

$$z = 40 \text{ Minuten.}$$

2. Lösung.

A schrieb in der Minute 3mal weniger Worte als C, brauchte somit 3mal länger; ebenso B $1\frac{1}{2}$ mal länger. Demnach ist die Zeit von 220 Minuten in den Verhältnissen $3:1\frac{1}{2}:1$ oder $6:3:2$ zu teilen. Die Teile sind 120 Minuten, 60 Minuten und 40 Minuten. Antwort: A war 2 Stunden, B 1 Stunde und C 40 Minuten beschäftigt.

3. Schwaben. 1892.

Drei Maurer sollen eine Mauer aufführen. Gemeinschaftlich würden diese Mauer vollenden A und B in 12 Tagen, B und C in 20 Tagen, A und C in 15 Tagen. Wie viele Zeit würde jeder Maurer allein brauchen? In welcher Zeit wird die Mauer vollendet sein, wenn die drei Arbeiter gemeinsam arbeiten?

1. Lösung.

Bei der Annahme, daß die Mauer 60 cbm fassen soll, lieferten A und B täglich 5 cbm, B und C 3 cbm und A und C 4 cbm, oder A, B und C zusammen 6 cbm. Es bringt daher A allein $(6-3)$ cbm fertig, braucht also 20 Tage, B macht 2 cbm, braucht darum 30 Tage, und C vollendet 1 cbm und hat deshalb 60 Tage nötig.

2. Lösung.

Wenn A allein x Tage, B allein y Tage und C allein z Tage braucht, so kann A täglich $\frac{1}{x}$, B $\frac{1}{y}$ und C $\frac{1}{z}$ Teile der Mauer vollenden.

A und B zusammen führen $\frac{1}{12}$, B und C $\frac{1}{20}$ und A und C $\frac{1}{15}$ der Mauer auf. Es ist daher

$$\begin{array}{rcl} \text{I} & \frac{1}{x} + \frac{1}{y} & = \frac{1}{12} \\ \text{II} & \frac{1}{y} + \frac{1}{z} & = \frac{1}{20} \\ \text{III} & \frac{1}{x} + \frac{1}{z} & = \frac{1}{15} \\ \hline \text{IV} = \text{I} - \text{II} & \frac{1}{x} - \frac{1}{z} & = \frac{1}{30} \\ \text{V} = \text{IV} + \text{III} & \frac{2}{x} & = \frac{1}{10} \\ & x & = 20 \text{ Tage} \\ & y & = 30 \text{ Tage} \\ & z & = 60 \text{ Tage.} \end{array}$$

Antwort: A allein braucht 20 Tage, B 30 Tage und C 60 Tage, alle drei zusammen 10 Tage.

1. Pfalz. 1894.

Vier Arbeiter A, B, C und D sollen gemeinschaftlich einen Graben auswerfen. A würde denselben allein in 20, B in 18, C in 24 und D in 30 Tagen fertigen. Bevor sie jedoch zusammen an die Arbeit gehen, haben A und D schon einen Tag gearbeitet; C dagegen setzt krankheitshalber 4 Tage aus; in wie viel Tagen wird der Graben fertig sein?

1. Lösung.

Unter der Annahme, daß 360 cbm auszuheben sind, bringt A täglich 18 cbm, B 20 cbm, C 15 cbm und D 12 cbm zu stande. A und D haben zuerst $18 + 12 = 30$ cbm, dann A, B und D in 4 Tagen weiter 200 cbm fertig gebracht, so daß nur mehr 130 cbm zu vollenden waren. Hiezu brauchen die vier Arbeiter zusammen 2 Tage.

2. Lösung.

Bezeichnet x die Zahl der Tage, welche alle Arbeiter zusammen arbeiten, so hat C x Tage, B (x + 4) Tage, A und D jeder (x + 5) Tage gearbeitet. A vollendet täglich $\frac{1}{20}$, B $\frac{1}{18}$, C $\frac{1}{24}$ und D $\frac{1}{30}$ der ganzen Arbeit. Somit ist

$$\begin{array}{rcl} \frac{1}{20}(x+5) + \frac{1}{18}(x+4) + \frac{1}{24}x + \frac{1}{30}(x+5) & = & 1 \\ \frac{1}{20}x + \frac{1}{18}x + \frac{1}{24}x + \frac{1}{30}x & = & 1 - \frac{1}{4} - \frac{2}{9} - \frac{1}{6} \\ 18x + 20x + 15x + 12x & = & 36 - 9 - 8 - 6 \\ \hline & & 360 \qquad \qquad \qquad 36 \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} \frac{65x}{360} & = & \frac{13}{36} \\ x & = & \frac{130}{65} = 2 \text{ Tage.} \end{array}$$

Antwort: Der Graben ist in 7 Tagen, nachdem A und D zu arbeiten angefangen haben, fertig.

3. Oberbayern. 1892.

An einer Mauer, welche $53\frac{1}{3}$ m lang, 1 m breit und 2 m hoch ist, arbeiten zwei Maurer, von denen der eine bei 9stündiger Arbeit $5\frac{1}{3}$ cbm, der andere bei täglich 11stündiger Arbeit in 6 Tagen $35\frac{5}{9}$ cbm aufzuführen im stande ist. In welcher Zeit wird die Arbeit fertig, wenn jeder 10 Stunden täglich arbeitet und der erste 5 Tage, der zweite 2 Tage versäumt.

1. Lösung.

- I. Der erste Maurer macht in 1 Stunde $\frac{16}{27}$ cbm, in 10 Stunden $\frac{160}{27}$ cbm.
- II. Der zweite Maurer macht in 1 Stunde $\frac{320}{9 \times 66}$ cbm, in 10 Stunden $\frac{1600}{297}$ cbm.
- III. Die zwei Maurer verfertigen zusammen täglich $\frac{160}{27} + \frac{1600}{297} = \frac{1760 + 1600}{297} = \frac{3360}{297} = \frac{1120}{99}$ cbm.
- IV. Zu vollenden sind $\frac{160}{27} \times 1 \times 2 = \frac{320}{27}$ cbm.
- V. 3 Tage arbeitet der zweite Maurer allein. Er führt in dieser Zeit $\frac{1600}{99}$ cbm auf, so daß die beiden zusammen $\frac{320}{27} - \frac{1600}{99} = \frac{320}{27} - \frac{1600}{99} = \frac{320}{27} \times (1 - \frac{5}{3}) = \frac{320}{27} \times \frac{3-5}{3} = \frac{320}{27} \times \frac{-2}{3} = \frac{320}{27} \times \frac{2}{3}$ cbm vollenden müssen.
- VI. Sie haben hiezu $\frac{320}{27} \times \frac{2}{3} : \frac{1120}{99} = \frac{320}{27} \times \frac{2}{3} \times \frac{99}{1120} = 8$ Tage nötig.
- VII. Die Maurer versäumten 2 Tage, 3 Tage arbeitet der zweite allein und 8 Tage arbeiten sie mit einander; somit wird die Mauer in **13 Tagen** vollendet.

2. Lösung.

- I. Bezeichnet x die Zahl der Tage, innerhalb welcher die Mauer fertig wird, so sind (x - 5) Tage die Arbeitszeit des ersten Maurers und (x - 2) Tage diejenigen des zweiten.
- II. Nach obigem macht der erste Maurer täglich $\frac{160}{27}$ cbm, also in (x - 5) Tagen $(x-5) \frac{160}{27}$ cbm. Der zweite Maurer macht (x - 2) $\frac{1600}{297}$ cbm.
- III. Der Inhalt der Mauer ist $\frac{320}{27}$. Demgemäß ist

I	$(x-5) \frac{160}{27} + (x-2) \frac{1600}{297} = \frac{320}{27}$
II = I : $\frac{160}{27}$	$(x-5) \times \frac{1}{9} + (x-2) \frac{10}{99} = 2$
III = 99 × II	$(x-5) \times 11 + (x-2) 10 = 198$
	$11x - 55 + 10x - 20 = 198$
	$21x = 273$
	x = 13 Tage.

Antwort: Die Mauer wird nach **13 Tagen** fertig.

II. Anwendung von Gleichungen.

I. Gleichungen des I. Grades mit einer Unbekannten.

1. Unterfranken. 1893.

In der Schlacht bei Gravelotte am 18. August 1870 kam im französischen Heer auf je 600 Mann, im Heere der Deutschen auf je 500 Mann eine Kanone. Die Zahl der Franzosen verhielt sich zur Zahl der Deutschen wie 7:9. a) Wie stark war bei dieser Schlacht das Heer der Deutschen und das der Franzosen, wenn die Deutschen über 190 Kanonen mehr verfügten als die Franzosen?

Lösung.

Wenn die Anzahl der Kanonen der Deutschen x war, so hatten die Franzosen $(x - 190)$ Kanonen. Das deutsche Heer zählte $500 \times x$, das französische $600 (x - 190)$. Nun ist

$$600 (x - 190) : 500 x = 7 : 9$$

$$54 x - 190 \times 54 = 35 x$$

$$x = 540 \text{ Kanonen im deutschen}$$

Heere, 350 französische Kanonen.

Antwort: Das deutsche Heer hatte $540 \times 500 = 270\,000$ Mann, das französische 210 000 Mann.

2. Oberpfalz. 1881.

In einer Schule sind 2 Abteilungen und zusammen 66 Schüler. Aus der ersten Abteilung bezahlt jeder monatlich 75 ₤, aus der zweiten 50 ₤. Das Schulgeld beträgt monatlich in der ersten Abteilung 450 ₤ mehr, als in der zweiten. Wie viele Schüler sind in jeder Abteilung?

1. Lösung.

Wenn in der ersten Abteilung x Schüler sind, so ist die Summe ihrer Beiträge $75 x$ Pfennige. In der 2. Abteilung sind dann $(66 - x)$ Schüler und ihre Beiträge sind $(66 - x) 50$ Pfennige. Nach der Angabe ist

$$75 x = 50 (66 - x) + 450$$

$$3 x = 2 (66 - x) + 18$$

$$3 x = 132 - 2 x + 18$$

$$5 x = 150$$

$$x = 30 \text{ Schüler in der ersten Klasse.}$$

2. Lösung.

Wären in jeder Klasse 33 Schüler, so würden die Beiträge in der ersten Klasse $33 \times 25 = 825$ ₤ mehr sein, als diejenigen der

zweiten Klasse. Da aber der Mehrbetrag nur 450 ₤ ausmacht, so sind in der ersten Klasse weniger als 33 Schüler. Für je 1 Schüler in der ersten Klasse weniger beträgt der Unterschied der Beiträge $75 + 50 = 125$ ₤. Die abzumindernde Summe ist $825 - 450 = 375 = 3 \times 125$ ₤. Somit sind in der ersten Klasse 3 Schüler weniger als 33. Antwort: In der ersten Klasse sind 30, in der zweiten 36 Schüler.

1. Oberbayern. 1888.

Die Schulen A, B, C und D einer größeren Stadt zählen zusammen eine gewisse Anzahl von Schülern. Die Schule A zählt 25% der ganzen Schülerzahl und noch 400; die Schule B 50% des Restes weniger 500; die Schule C 20% der Schülerzahl von B und 590, und die Schule D die noch übrigen Schüler. Wenn nun die Schulen A und D zusammen 2450 Schüler zählen, wie viel beträgt die Schülerzahl?

Lösung.

I. Bezeichnet man mit x die Anzahl der Schüler, so sind in

$$A \quad \frac{x}{4} + 400$$

$$B \quad \frac{1}{2} \left[x - \left(\frac{x}{4} + 400 \right) \right] - 500 = \frac{3}{8}x - 700$$

$$C \quad \frac{1}{5} \left[\frac{3}{8}x - 700 \right] + 590 = \frac{3}{40}x + 450$$

$$D \quad x - \left[\left(\frac{x}{4} + 400 \right) + \left(\frac{3}{8}x - 700 \right) + \left(\frac{3}{40}x + 450 \right) \right] = \frac{3}{10}x - 150$$

$$II. \text{ Nach der Angabe ist } \frac{x}{4} + 400 + \frac{3}{10}x - 150 = 2450$$

$$\frac{11}{20}x = 2200$$

$$x = 4000 \text{ Schüler.}$$

Antwort: In den vier Schulen sind 4000 Schüler.

1. Unterfranken. 1889.

A und B hatten gemeinsam eine Fabrik bauen lassen. 80% aller Kosten waren von A bestritten worden. Dieser verkaufte später $\frac{5}{8}$ seines Anteils an C; den Rest seiner Ansprüche zahlt B bar aus. A legte nun diesen Rest zinsbringend an und zwar $\frac{3}{4}$ des Betrages zu 4% auf 2 Jahre 6 Monate, das Übrige zu 5% auf 3 Jahre. Die von A ausgeliehenen Kapitalien entziffern einschließlich der einfachen Zinsen 267000 M. a) Wie hoch belaufen sich die Baukosten der Fabrik? b) Wie groß waren die beiden von A verzinslich angelegten Kapitalien? c) Was wiegen die genannten 267000 M., wenn dieselben nur mit deutschen Kronen bezahlt werden, von denen jede 3,5838 g feines Gold

enthält und in den deutschen Reichsgoldmünzen die Masse des Kupfers sich zu der des Goldes wie 1 : 9 verhält?

Lösung.

A. Um die erste Frage zu beantworten, berechnet man zuerst die von A verzinslich angelegte Summe. Diese sei x , dann ist

$$I. x + \frac{3}{4}x \times \frac{4}{100} \times 2,5 + \frac{x}{4} \times \frac{5}{100} \times 3 = 267\,000 \text{ M.}$$

$$x + \frac{3}{40}x + \frac{3}{80}x = 267\,000 \text{ M.}$$

$$\frac{89}{80}x = 267\,000 \text{ M.}$$

$$x = 240\,000 \text{ M.}$$

II. A hat 180 000 M. zu 4% und 60 000 M. zu 5% ausgeliehen.

III. Die von A ausgeliehene Summe betrug nur $\frac{3}{8}$ seiner Einlage.

$$\text{Letztere war daher } \frac{240\,000}{3} \times 8 = 640\,000 \text{ M.}$$

IV. Die Einlage des A machte $\frac{4}{5}$ der Baukosten aus. Mithin betrugen die Baukosten $640\,000 \times \frac{5}{4} = 800\,000 \text{ M.}$

B. Die Menge des feinen Goldes in 267 000 M. ist $\frac{267\,000}{10} \times 3,5838 = 26\,700 \times 3,5838 \text{ g.}$ Daher ist das Gewicht von 26 700 Kronen $= 26\,700 \times 3,5838 \times \frac{10}{9} = 106\,319,4 \text{ g} = 106 \text{ kg } 319,4 \text{ g.}$

Antwort: a) Die Baukosten der Fabrik beliefen sich auf 800 000 M.

b) A hatte 180 000 M. und 60 000 M. verzinslich angelegt.

c) Das Gewicht von 26 700 Kronen ist 106 kg 319,4 g.

1. Unterfranken. 1886.

Zur Herstellung eines Fabrikgebäudes gibt jemand $\frac{7}{12}$ der Kosten. Später verkauft er von seinem Anteil $\frac{2}{5}$ mit 10% und den Rest mit $16\frac{2}{3}\%$ Gewinn und nahm im ganzen 47 880 M. ein. Wie hoch haben sich die Herstellungskosten für die Fabrik belaufen?

1. Lösung.

Diese Aufgabe kann in derselben Weise, wie die vorhergehende gelöst werden. Das Resultat ist 72 000 M.

2. Lösung.

Werden die Herstellungskosten mit x M. bezeichnet, so ist der Beitrag des B $\frac{7}{12}x$. Ferner ist

$$\frac{7}{12}x + \frac{2}{5} \times \frac{7}{12}x \times \frac{10}{100} + \frac{3}{5} \times \frac{7}{12}x \times \frac{50}{100} = 47\,880$$

$$\frac{7}{12}x (1 + \frac{1}{25} + \frac{1}{10}) = 47\,880$$

$$\frac{7}{12}x \times \frac{57}{50} = 47\,880$$

$$x = \frac{47\,880 \times 12 \times 50}{7 \times 57} = \frac{6840 \times 200}{19} = 360 \times 200 = 72\,000 \text{ M.}$$

Antwort: Die Kosten der Fabrik belaufen sich auf 72 000 M.

3. Unterfranken. 1886.

Die Gemeinden A, B und C, von denen A 750, B 875 und C 1000 Einwohner zählt, unternehmen den Bau einer Brücke, von welcher A 2,4, B 3,2 und C 4 km entfernt ist. Sie bestreiten die Kosten nach den geraden Verhältnissen ihrer Einwohnerzahl und im umgekehrten Verhältnisse ihrer Entfernung von der Brücke. Die Gemeinde A hat infolgedessen 300 *M.* mehr zu zahlen als B. a) Was kostet der Bau der Brücke? b) Welche Summe hat jede Gemeinde beizutragen?

Lösung.

Bezeichnet x den Beitrag einer jeden Person in der Entfernung 1, so beträgt der Beitrag der Gemeinde A $\frac{750x}{2,4}$ und der Gemeinde C $\frac{875x}{3,2}$. Da die Gemeinde A 300 *M.* mehr bezahlen muß als B, so ist

$$\begin{aligned}\frac{750x}{2,4} &= \frac{875x}{3,2} + 300 \\ \frac{30x}{2,4} &= \frac{35x}{3,2} + 12 \\ 96x - 84x &= 12 \times 2,4 \times 3,2 \\ 12x &= 12 \times 7,68 \\ x &= 7,68 \text{ } M.\end{aligned}$$

Es hat zu bezahlen:

$$\begin{array}{lcl} A & \frac{750 \times 7,68}{2,4} & = 750 \times 3,2 = 2400 \text{ } M. \\ B & \frac{875 \times 7,68}{3,2} & = 875 \times 2,4 = 2100 \text{ } M. \\ C & \frac{1000 \times 7,68}{4} & = 1000 \times 1,92 = 1920 \text{ } M. \\ & \text{Summa} & 6420 \text{ } M. \end{array}$$

Antwort: a) Der Bau der Brücke kostet 6420 *M.* b) Die Gemeinde A muß 2400 *M.*, B 2100 *M.* und C 1920 *M.* beitragen.

1. Oberbayern. 1886.

Vier Personen: A, B, C und D teilen sich in eine Erbschaft auf folgende Weise: A nimmt 400 *M.* über den vierten Teil des Ganzen; B nimmt 600 *M.* mehr als die Hälfte des Teiles von A betrug; C nimmt 300 *M.* weniger als $\frac{3}{4}$ des Restes, worauf für D noch 1000 *M.* übrig bleiben. Wie groß ist das Vermögen?

Lösung.

Bezeichnet x $\mathcal{M}$. das Vermögen, so sind die Anteile

$$\begin{array}{lll} \text{A} & \frac{x}{4} + 400 & = \frac{x}{4} + 400 \\ \text{B} & \frac{1}{2} \left(\frac{x}{4} + 400 \right) + 600 & = \frac{x}{8} + 800 \\ \text{C} & \frac{3}{4} \left[x - \frac{3}{8}x - 1200 \right] - 300 & = \frac{1}{8}x - 1200 \\ & \text{Summa} & = \frac{2}{3}x \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \text{Der Rest } \frac{5}{3}x \text{ ist } \frac{5}{3}x = 1000 \\ x = 600 \mathcal{M}. \end{array}$$

Antwort: Das Vermögen ist 600 $\mathcal{M}$.

1. Oberbayern. 1895.

A, B, C und D teilen eine gewisse Summe. A erhält $\frac{1}{4}$ derselben und 400 $\mathcal{M}$, B $\frac{1}{2}$ des Restes weniger 500 $\mathcal{M}$, C $\frac{1}{5}$ des Anteils von B und 590 $\mathcal{M}$ und D den Rest. A und D empfangen zusammen 2450 $\mathcal{M}$. Wie viel beträgt der Anteil einer jeden Person?

Lösung.

Wenn die zu verteilende Summe x $\mathcal{M}$ beträgt, so erhält

$$\begin{array}{ll} \text{A} & \frac{x}{4} + 400 = \frac{x}{4} + 400 \\ \text{Rest} & \frac{3}{4}x - 400 \\ \text{B} & \frac{1}{2} \left(\frac{3}{4}x - 400 \right) - 500 = \frac{3}{8}x - 700 \\ \text{C} & \frac{1}{5} \left(\frac{3}{8}x - 700 \right) + 590 = \frac{3}{40}x + 450 \\ \text{D} & x - \left(\frac{x}{4} + 400 + \frac{3}{8}x - 700 + \frac{3}{40}x + 450 \right) = \frac{3}{10}x - 150. \end{array}$$

Nun sind die Anteile von A und D

$$\begin{array}{l} \frac{x}{4} + 400 + \frac{3}{10}x - 150 = 2450 \\ \frac{5x}{20} + \frac{6x}{20} = 2200 \\ x = 4000 \mathcal{M}. \end{array}$$

Antwort: A erhält 1400 $\mathcal{M}$, B bekommt 800 $\mathcal{M}$, C trifft 750 $\mathcal{M}$ und D nimmt 1050 $\mathcal{M}$.

1. Oberbayern. 1885.

Fünf Personen legen 8080 $\mathcal{M}$. zusammen und gewinnen damit 2626 $\mathcal{M}$, welche sie nach Verhältnis der Einlage verteilen. Nun gab A 250 $\mathcal{M}$. mehr als die Hälfte von B, ferner B 400 $\mathcal{M}$. weniger als das doppelte von C, dann C 200 $\mathcal{M}$. mehr als $\frac{2}{3}$ von D und D 150 $\mathcal{M}$. mehr als $\frac{4}{5}$ von E; wie hoch sind Einlage und Gewinn eines jeden?

Lösung.

Die Einlage des E sei x $\mathcal{M}$, dann sind die Einlagen des

$$\begin{array}{rcl} \text{E} & & = x \\ \text{D} & \frac{4}{5}x + 150 & = \frac{4}{5}x + 150 \mathcal{M} \\ \text{C} & \frac{2}{3}(\frac{4}{5}x + 150) + 200 & = \frac{8}{15}x + 300 \text{ „} \\ \text{B} & 2(\frac{8}{15}x + 300) - 400 & = \frac{16}{15}x + 200 \text{ „} \\ \text{A} & \frac{1}{2}(\frac{16}{15}x + 200) + 250 & = \frac{8}{15}x + 350 \text{ „} \\ \hline \text{A} + \text{B} + \text{C} + \text{D} + \text{E} & & = \frac{59}{15}x + 1000 \mathcal{M} \\ & \frac{59}{15}x + 1000 & = 8080 \end{array}$$

$$x = \frac{7080 \times 15}{59} = 120 \times 15 = 1800 \mathcal{M}.$$

Hieraus ergeben sich als Einlagen des

und als Gewinne

A	1310 $\mathcal{M}$	$1310 \times \frac{2626}{8080} = 425\frac{3}{4} \mathcal{M}$
B	2120 „	$2120 \times \frac{2626}{8080} = 689 \text{ „}$
C	1260 „	$1260 \times \frac{2626}{8080} = 409\frac{1}{2} \text{ „}$
D	1590 „	$1590 \times \frac{2626}{8080} = 516\frac{3}{4} \text{ „}$
E	1800 „	$1800 \times \frac{2626}{8080} = 585 \text{ „}$

2. Mittelfranken. 1887.

Von einer Summe Geldes, die unter eine gewisse Anzahl Personen geteilt werden soll, erhält A 1000 $\mathcal{M}$ und $\frac{1}{7}$ des Restes; B 2000 $\mathcal{M}$ und wieder $\frac{1}{7}$ des Restes; C 3000 $\mathcal{M}$ und abermals $\frac{1}{7}$ des Restes u. s. f. Auf diese Weise erhalten alle gleich viel. Wie groß ist die zu teilende Summe? Wie viel bekommt jede Person?

Lösung.

I. Bezeichnet x $\mathcal{M}$ die zu verteilende Summe, so erhält A

$$1000 + \frac{x - 1000}{7} = \frac{x + 6000}{7} \mathcal{M}.$$

II. Der Rest ist $x - \frac{x + 6000}{7} = \frac{6x - 6000}{7}$

$$\begin{aligned} \text{III. B erhält } 2000 + \frac{1}{7} \left[\frac{6x - 6000}{7} - 2000 \right] &= 2000 + \frac{6x - 6000 - 14000}{49} \\ &= \frac{6x + 78000}{49} \end{aligned}$$

IV. Gemäß der Angabe ist

$$\begin{aligned} \frac{x + 6000}{7} &= \frac{6x + 78000}{49} \\ 7x + 42000 &= 6x + 78000 \\ x &= 36000 \mathcal{M} \end{aligned}$$

Antwort: Die zu verteilende Summe ist 36 000 $\mathcal{M}$. Jede Person erhält 6000 $\mathcal{M}$. (Die Zahl der Personen beträgt 6.)

1. Oberfranken. 1886.

Aus einer Gantmasse wird 4 Gläubigern ein Grundstück derartig zugewiesen, daß A auf $\frac{2}{9}$ des Erlöses Anspruch hat, während B um $\frac{1}{4}$ weniger als A, C aber um die Hälfte mehr als D erhalten soll. Ein späterer Schätzungswert des Grundstückes übertrifft den bei der anfänglich beabsichtigten Teilung gemachten um $18\frac{3}{4}\%$. Beim Verkauf erlöst man aber um 20% weniger als der zweite Anschlag beträgt, und außerdem geht am Erlös für Steuern u. s. w. noch $\frac{1}{5}$ des Anschlages ab. Infolgedessen erhält B 300 *M.* weniger, als ihm nach dem anfänglichen Schätzungswerte zugeschrieben wurde. Um wie viele *M.* erhielt D weniger?

Lösung.

I. Wenn die erste Schätzung x *M.* betrug, dann war der Anspruch des

$$\begin{array}{ll} \text{A} & \frac{2}{9}x \\ \text{B} & \frac{2}{9}x \times \frac{3}{4} = \frac{1}{6}x \end{array}$$

II. Auf den Rest $x - (\frac{2}{9}x + \frac{1}{6}x) = x - \frac{7}{18}x = \frac{11}{18}x$ hatten C und D im Verhältnisse 3 : 2 Anspruch.

III. Der Anspruch des C war daher $\frac{11}{18}x \times \frac{3}{5} = \frac{11}{30}x$ und des D $\frac{11}{45}x$.

IV. Die Ansprüche des B und D verhalten sich wie $\frac{1}{6} : \frac{11}{45} = 15 : 22$. In demselben Verhältnisse stehen auch die Minderungen der Anteile. Da B 300 *M.* weniger erhalten hat, so erhielt D um $\frac{300}{15} \times 22 = 440$ *M.* weniger.¹⁾

Antwort: D erhielt um 440 *M.* weniger.

¹⁾ Hiemit ist die Aufgabe gelöst. Die übrigen Angaben können benützt werden, um die Höhe der Schätzungen und der Ansprüche zu bestimmen. Bei der zweiten Schätzung wurde der Wert zu $x + x \times \frac{75}{100} = x + \frac{3x}{4} = \frac{7x}{4}$ gefunden. Beim Verkaufe wurden aber nur $\frac{19x}{16} \times \frac{4}{5} = \frac{19x}{20}$ erlöst. Hievon ging für Steuern und so weiter noch $\frac{1}{5}x$ ab, so daß $\frac{19x}{20} - \frac{1}{5}x = \frac{17x}{20} = \frac{3}{4}x$ zur Verteilung kamen. Es erhielt somit jeder Gläubiger $\frac{1}{4}$ seines Anspruches weniger. Diese Minderung betrug bei B 300 *M.*; folglich war der Anspruch des B 1200 *M.*, und da ihm $\frac{1}{6}$ der ersten Schätzung in Aussicht gestellt war, so hatte die erste Schätzung 7200 *M.* betragen. Hievon sollte A 1600 *M.*, B 1200 *M.*, C 2640 *M.* und D 1760 *M.* erhalten. Die zweite Schätzung war 8550 *M.* Erlöst wurden $8550 \times \frac{4}{5} = 6840$ *M.* Die Steuern u. s. w. beanspruchten $\frac{7200}{5} = 1440$ *M.*, so daß 5400 *M.* zur Verteilung kamen. Hievon erhielt A 1200 *M.*, B 900 *M.*, C 1980 *M.* und D 1320 *M.*

1. Oberpfalz. 1882.

Ein Vater hinterläßt seinen vier Söhnen A, B, C, D ein Vermögen von 6900 *M.* Nach dem Testamente soll B doppelt so viel erhalten als A weniger 1500 *M.*, C doppelt so viel als B und noch 200 *M.* und D dreimal so viel als C und noch 600 *M.* Wie viel bekommt jeder?

Lösung.

A erhält	x
B „	2 x — 1500
C „	2 (2 x — 1500) + 200 = 4 x — 2800
D „	3 (4 x — 2800) + 600 = 12 x — 7800
A + B + C + D erhalten	19 x — 12100 = 6900
	19 x = 19000
	x = 1000 <i>M.</i>

Es erhält somit A 1000 *M.*, B 500 *M.*, C 1200 *M.* und D 4200 *M.*

2. Unterfranken. 1885.

Ein Kaufmann hat 140 Zentner von einer Ware verkauft; anfangs verkaufte er mit 12 S Gewinn, später mit 8 S Verlust am Kilogramm. Beim Abschluß des Geschäftes zeigt sich noch ein Überschuß von 440 *M.* Gewinn, was $14\frac{2}{3}\%$ der Ankaufssumme beträgt. a) Was hat die Ware im Ankaufe gekostet? b) Wie viele Zentner verkauft er mit Gewinn und wie viele mit Verlust?

1. Lösung.

A. Die Ankaufssumme ist $(440 : 14\frac{2}{3}) \times 100 = 3000$ *M.*

B) Bezeichnet x die Anzahl der mit Gewinn verkauften Kilogramme und $(7000 - x)$ der mit Verlust verkauften, so ist

$$x \times \frac{12}{100} - (7000 - x) \frac{8}{100} = 440$$

$$12x + 8x = 44000 + 56000$$

x = 5000 kg = 100 Zentner mit Gewinn

2000 kg = 40 Zentner mit Verlust.

2. Lösung.

A. Die Ankaufssumme ist (wie oben) 3000 *M.*

B. Wären durchweg an jedem Kilogramm 12 S gewonnen worden, so hätte der Gewinn $70 \times 12 = 840$ *M.*, also um 400 *M.* mehr betragen, als thatsächlich gewonnen wurden. Durch jedes mit Verlust verkaufte Kilogramm wurde der Gewinn um $(12 + 8) \text{ S} = \frac{1}{5} \text{ M.}$ verringert. Zur Verminderung um 400 *M.* waren $400 : \frac{1}{5} = 2000$ kg mit Verlust verkauft worden.

Antwort: Es wurden 5000 kg = 100 Zentner mit Gewinn und 40 Zentner mit Verlust verkauft. Die Einkaufssumme betrug 3000 *M.*

2. Schwaben. 1895.

Ein Butterhändler erhält für $\frac{5}{6}$ seines Vorrates à Pfd. $1\frac{1}{5}$ *M.* und für den Rest à Pfund $\frac{9}{10}$ *M.* Dadurch nimmt er 170 *M.* mehr ein, als wenn er $\frac{1}{3}$ seines Vorrates à Pfd. 1 *M.* und den Rest à $\frac{4}{5}$ *M.* verkauft hätte. Wie viele Pfunde hatte er?

Lösung.

Bezeichnet x die Anzahl der Pfunde, welche der Händler hatte, dann ist

$$\begin{aligned}\frac{5}{6}x \times 1\frac{1}{5} + \frac{1}{6}x \times \frac{9}{10} &= \frac{1}{3}x + \frac{2}{3} \times \frac{4}{5}x + 170 \\ x + \frac{3}{20}x &= \frac{1}{3}x + \frac{8}{15}x + 170 \\ 60x + 9x - 20x - 32x &= 170 \times 60 \\ 17x &= 170 \times 60 \\ x &= 600 \text{ Pfd.} = 6 \text{ Zentner.}\end{aligned}$$

Antwort: Der Händler hatte **6 Zentner** Butter.

2. Oberpfalz. 1882.

1200 *M.* trugen in 11 Jahren ebensoviel Zins als 1600 *M.*, welche zu $1\frac{1}{2}\%$ höher ausgeliehen waren, in 6 Jahren. Zu wie viel Prozent waren beide Kapitalien ausgeliehen?

1. Lösung.

$$\begin{aligned}\text{a) } 1200 \text{ } M. \text{ trugen bei } x\% \text{ in 11 Jahren an Zinsen } 1200 \times \frac{x}{100} \times 11 &= 132x \text{ } M. \\ \text{b) } 1600 \text{ } M. \text{ trugen bei } (x + 1,5) \text{ Prozent in 6 Jahren an Zinsen } &1600 \times \frac{(x + 1,5)}{100} \times 6 = (96x + 144) \text{ } M.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{Laut Angabe ist } 132x &= 96x + 144 \\ 36x &= 144 \\ x &= 4\%\end{aligned}$$

2. Lösung.

Bei gleichem Zinse verhalten sich die Prozente umgekehrt, wie die Produkte aus Kapital und Zahl der Jahre. Bezeichnet x *M.* den Zinsfuß von 1200 *M.* Kapital, so ist

$$\begin{aligned}(12 \times 11) : (16 \times 6) &= (x + 1,5) : x \\ 11 : 8 &= (x + 1,5) : x \\ 11x &= 8x + 12 \\ x &= 4\%\end{aligned}$$

Antwort: 1200 *M.* waren zu 4% und 1600 *M.* zu 5,5% ausgeliehen.

5. Oberpfalz. 1890.

Zwei Kapitalien betragen zusammen 11 880 *M* und geben jährlich 452,30 *M* Zinsen. Wie groß ist jedes, wenn das erste zu $4\frac{1}{2}\%$, das zweite zu $3\frac{1}{2}\%$ angelegt ist?

1. Lösung.

Wären die beiden Kapitalien zu $4,5\%$ ausgeliehen, würden sie $11880 \times \frac{4,5}{100} = 534,6$ *M* Zinsen geben. Ihre Zinsen betragen aber $534,6 - 452,3 = 82,3$ *M* weniger, weil das zweite Kapital 1% weniger eintrug. Somit entspricht je 1 *M* Minderertrag 100 *M* des zweiten Kapitals. Demnach war das zweite Kapital **8230** *M*, das erste aber $11880 - 8230 = \mathbf{3650}$ *M*.

2. Lösung.

Wenn das erste Kapital x *M* betrug, so war das zweite $(11880 - x)$ *M*, und deren Zinsen waren

$$x \times \frac{4,5}{100} + (11880 - x) \times \frac{3,5}{100} = 452,30$$

$$9x + 7(11880 - x) = 90460$$

$$9x + 83160 - 7x = 90460$$

$$2x = 7300$$

$$x = \mathbf{3650} \text{ } M.$$

Antwort: Das zu $4\frac{1}{2}\%$ ausgeliehene Kapital war **3650** *M*, das zu $3\frac{1}{2}\%$ ausstehende war **8230** *M*.

1. Oberpfalz. 1887.

Ein Kapital von 24 600 *M* liegt teils zu $4\frac{1}{2}\%$, teils zu $4\frac{1}{4}\%$ aus. Würde der erste Teil zum Prozentsatz des zweiten und dieser zum Prozentsatz des ersten angelegt, so würde das Kapital jährlich 10,5 *M* Zins mehr tragen. Wie viel betragen beide Teile?

1. Lösung.

Wäre das zweite oder größere Kapital um $\frac{1}{4}\%$ höher angelgt, so würde der Teil, um welchen dieses Kapital größer ist, als das erste, 10,5 *M* Zins bringen. Demnach ist dieser Teil $\frac{10,50}{0,25} \times 100 = 4200$ *M*.

Das kleine Kapital ist somit $\frac{24600 - 4200}{2} = \mathbf{10\ 200}$ *M*, das größere **14 400** *M*.

2. Lösung.

Wenn x $\mathcal{M}$. das kleinere Kapital bezeichnet, so ist

$$\begin{aligned} x \times \frac{4,5}{100} + (24600 - x) \frac{4,25}{100} + 10,5 &= x \times \frac{4,25}{100} + \frac{(24000 - x) 4,5}{100} \\ 4,5x + 4,25 \times 24600 - 4,25x + 1050 &= 4,25x + 4,5 \times 24000 - 4,5x \\ 9x - 8,5x &= 24600 \times 0,25 - 1050 \\ 0,5x &= 6150 - 1050 = 5100 \\ x &= 10200 \mathcal{M}. \end{aligned}$$

Antwort: Das zu $4\frac{1}{2}\%$ ausgeliehene Kapital ist **10200 $\mathcal{M}$.**, das zu $4\frac{1}{4}\%$ ausliegende **14400 $\mathcal{M}$.**

2. Oberbayern. 1885.

Ein Kapital von 4000 $\mathcal{M}$ sollte nach einem Jahr zurückbezahlt werden. Der Schuldner bezahlte jedoch 2000 $\mathcal{M}$ nach $\frac{3}{4}$ Jahren und den Rest nach 2 Jahren mit 60 $\mathcal{M}$. Verzugszinsen; zu wie viel Prozent wurden letztere berechnet?

1. Lösung.

Da 2000 $\mathcal{M}$ 1 Jahr nach dem Termine zurückbezahlt wurden, so muß der Schuldner die Zinsen für 1 Jahr entrichten, darf aber, da er 2000 $\mathcal{M}$ $\frac{1}{4}$ Jahr vor dem Termine bezahlt, die Zinsen für $\frac{1}{4}$ Jahr in Abrechnung bringen. Bezeichnet x die Prozente, so ist

$$\begin{aligned} 2000 \times \frac{x}{100} - 2000 \times \frac{x}{100} \times \frac{1}{4} &= 60 \\ x &= 4\%. \end{aligned}$$

2. Lösung.

Der Schuldner hat 2000 $\mathcal{M}$ 1 Jahr nach dem Termine, dagegen dieselbe Summe $\frac{1}{4}$ Jahr vor dem Termine bezahlt. Er hatte daher nur die Verzugszinsen für 2000 $\mathcal{M}$ und $\frac{3}{4}$ Jahre zu entrichten. Diese betrugen 60 $\mathcal{M}$ d. i. für 1 Jahr 80 $\mathcal{M}$. Für das Kapital 100 $\mathcal{M}$ betragen sie $\frac{80}{100} = 8\%$ jährlich.

Antwort: Es wurden **4%** Verzugszinsen berechnet.

2. Oberpfalz. 1885.

Jemand hatte ein gewisses Kapital 2 Jahre zu $3\frac{1}{2}\%$ und ein anderes um 250 $\mathcal{M}$ kleineres Kapital $2\frac{1}{2}$ Jahre zu 4% ausgeliehen und im ganzen 170,50 $\mathcal{M}$. Zinsen eingenommen. Wie groß war jedes der beiden Kapitalien?

1. Lösung.

Wird das größere Kapital mit x $\mathcal{M}$. bezeichnet, so ist das kleinere Kapital $(x - 250)$ $\mathcal{M}$. Ferner ist

$$\begin{aligned} x \times \frac{3,5}{100} \times 2 + (x - 250) \times \frac{2,5}{100} \times 4 &= 170,5 \\ 7x + 10x - 2500 &= 17050 \\ x &= \mathbf{1150} \text{ } \mathcal{M}. \\ x - 250 &= \mathbf{900} \text{ } \mathcal{M}. \end{aligned}$$

2. Lösung.

Wäre das zweite Kapital um 250 $\mathcal{M}$. größer, so wären beide Kapitalien gleich groß und die Zinsen wären dann $170,50 + 250 \times \frac{2,5}{100} \times 4 = 195,50$ $\mathcal{M}$ gewesen. Je 100 $\mathcal{M}$. dieser beiden gleich großen Kapitalien entsprechen an Zinsen $3\frac{1}{2} \times 2 = 7$ und $2\frac{1}{2} \times 4 = 10$, zusammen 17 $\mathcal{M}$. Hieraus folgt, daß sie zusammen $\frac{195,5 \times 200}{17} = 11,5 \times 200 = 2300$ $\mathcal{M}$. betragen würden. Das größere Kapital ist $\frac{2300}{2} = \mathbf{1150}$ $\mathcal{M}$, das kleinere $1150 - 250 = \mathbf{900}$ $\mathcal{M}$.

1. Oberpfalz. 1884.

Zwei Kapitalien verhalten sich ihrer Größe nach zu einander wie 2 : 5; nachdem das erste 3 Jahre 4 Monate zu $4\frac{1}{2}\%$, das zweite 5 Jahre 6 Monate zu 4% ausgestanden, erhält man 11760 $\mathcal{M}$. zurück. Wie groß ist jedes Kapital?

1. Lösung.

Bezeichnet x $\mathcal{M}$ das erste Kapital, so ist das zweite $\frac{5}{2}x$ $\mathcal{M}$. Die Zinsen des ersten Kapitales sind $x \times \frac{4,5}{100} \times 3\frac{1}{3} = \frac{15x}{100}$ $\mathcal{M}$, diejenigen des zweiten Kapitales sind $\frac{5}{2}x \times \frac{4}{100} \times 5\frac{1}{2} = \frac{55x}{100}$ $\mathcal{M}$. Somit ist

$$\begin{aligned} x + \frac{15x}{100} + \frac{5x}{2} + \frac{55x}{100} &= 11760 \\ 4,2x &= 11760 \\ x &= \mathbf{2800} \text{ } \mathcal{M} \text{ (Erstes Kapital)} \\ \frac{5}{2}x &= \mathbf{7000} \text{ } \mathcal{M} \text{ (Zweites Kapital)}. \end{aligned}$$

2. Lösung.

Je 700 $\mathcal{M}$, welche zu den angegebenen Prozentsätzen während der bezeichneten Zeiten ausgeliehen werden, wachsen zu folgender Summe an: a) 200 $\mathcal{M}$ zu $4\frac{1}{2}\%$ in $3\frac{1}{3}$ Jahren zu 230 $\mathcal{M}$; b) 500 $\mathcal{M}$ zu 4% in $5\frac{1}{2}$ Jahren zu $500 \times 1,22 = 610$ $\mathcal{M}$, zusammen auf 840 $\mathcal{M}$. Hieraus folgt, daß das erste Kapital $\frac{11760}{840} \times 200 = \mathbf{2800}$ $\mathcal{M}$, das zweite $\frac{11760}{840} \times 500 = \mathbf{7000}$ $\mathcal{M}$ beträgt.

2. Unterfranken. 1893.

Ein Vermögen bestand zu $\frac{1}{3}$ aus 4prozentigen Staatspapieren, die al pari gekauft wurden, ferner zu $\frac{1}{3}$ aus Aktien, und um den Rest waren Grundstücke gekauft worden. Im vorigen Jahre ergaben die Aktien $5\frac{1}{4}\%$ Dividenden und die Grundstücke rentierten zu $4\frac{1}{4}\%$. Nun betrug das vorjährige Einkommen 1590 *M.*; wie groß ist das Vermögen?

1. Lösung.

Bezeichnet x das Vermögen, so ist

$$\frac{1}{3}x \times \frac{4}{100} + \frac{1}{3}x \times \frac{5,25}{100} + \frac{1}{3}x \times \frac{4,25}{100} = 1590$$

$$4x + 5,25x + 4,25x = 1590 \times 300$$

$$13,5x = 1590 \times 300$$

$$x = \frac{15900 \times 100}{45} = \frac{106000}{3} = 35\,333\frac{1}{3} \text{ *M.*}$$

2. Lösung.

Je 300 *M.* Kapital gaben $4 + 5\frac{1}{4} + 5\frac{1}{4} = 13,5$ *M.* Zinsen. Hier- nach berechnet sich das Kapital zu

$$\frac{1590 \times 300}{13,5} = 35\,333\frac{1}{3} \text{ *M.*}$$

Antwort: Das Vermögen betrug $35\,333\frac{1}{3}$ *M.*

2. Unterfranken. 1895.

Ein Kapitalist hatte $\frac{2}{5}$ seines Geldes auf Eisenbahnaktien, $\frac{1}{5}$ des- selben auf Ländereien und den Rest auf Bergwerksaktien verwendet. Durch erstere erhält er einen Gewinn von 13% , durch die Ländereien einen Gewinn von 9% , dagegen muß er bei den Bergwerksaktien eine Zubeße von 3% geben. Wenn ihm nun im ganzen aus seinem Gelde ein Gewinn von 2664 *M.* erwächst, wie groß ist sein Kapital?

1. Lösung.

Von der Summe x *M.* werfen $\frac{2}{5}x$ einen Gewinn von $\frac{2x}{5} \times \frac{13}{100}$ *M.*

ab, $\frac{1}{5}x$ den Gewinn von $\frac{x}{5} \times \frac{9}{100}$ und $\frac{4x}{15}$ *M.* einen Verlust von $\frac{4}{15}x \times \frac{3}{100}$ *M.* Demnach ist

$$\frac{26x}{500} + \frac{3x}{100} - \frac{4x}{500} = 2664$$

$$\frac{37x}{500} = 2664$$

$$x = \frac{2664 \times 500}{37} = 72 \times 500 = 36\,000 \text{ *M.*}$$

2. Lösung.

Je 1500 *M.* Vermögen trugen jährlich $78 + 45 - 12 = 111$ *M.* Gewinn. Das Vermögen war daher

$$\frac{2664}{111} \times 1500 = 36\,000 \text{ } M.$$

Antwort: Das Kapital war 36 000 *M.*

2. Unterfranken 1882.

Jemand hat ein Kapital zu 5% ausstehen, erhielt aber die Zinsen nicht ausbezahlt. Nach 3 Jahren setzte er den Zinsfuß für die Folge aus Rücksichten auf $4\frac{1}{2}\%$ herunter. Nach abermals 2 Jahren erhielt er endlich Kapital und (einfache) Zinsen, zusammen 2325 *M.* Wie groß war das Kapital?

Lösung.

Wird angenommen, daß das Kapital x *M.* betragen hat, so wurden zurückbezahlt

$$x + x \times \frac{5 \times 3}{100} + \frac{x \times 4,5 \times 2}{100} = 2325$$

$$124 x = 232\,500$$

$$x = 1875 \text{ } M.$$

Antwort: Das Kapital betrug 1875.

2. Gleichungen des 1. Grades mit zwei oder mehreren Unbekannten.

2. Oberbayern. 1888.

Ein Wasserbehälter kann durch eine Röhre gefüllt und durch eine andere entleert werden. Ist die eine Röhre 3, die andere 2 Stunden geöffnet, so wird der Wasservorrat um 780 Liter vermehrt. Ist die erste $4\frac{1}{2}$, die zweite $3\frac{3}{4}$ Stunden geöffnet, so wird der Wasservorrat um 315 Liter vermehrt. Wie viele Liter gibt jede Röhre in der Minute?

1. Lösung.

Wenn mit x Liter die von der ersten Röhre in jeder Stunde gelieferte Wassermenge, y Liter die von der zweiten Röhre gelieferte Menge bezeichnet, so ist

$$\begin{array}{rcl} \text{I.} & 3x - 2y & = 780 \\ \text{II.} & 4,5x - 3,75y & = 315 \\ \text{III} = 1,5 \times \text{I} & 4,5x - 3y & = 1170 \\ \text{II} & 4,5x - 3,75y & = 315 \\ \text{IV} = \text{III} - \text{II} & 0,75y & = 855 \\ & y & = 1140 \text{ Liter stündlich} \\ & x & = \frac{780 + 1140 \times 2}{3} = 1020 \text{ Liter stündlich.} \end{array}$$

2. Lösung.

- I. Die erste Röhre liefert in 3 Stunden das doppelte der stündlichen Menge der zweiten und 780 Liter; in 9 Stunden würde sie das 6fache der zweiten und 2340 Liter liefern.
- II. Im zweiten Falle liefert die erste Röhre in $4\frac{1}{2}$ Stunden das $3\frac{3}{4}$ fache der stündlichen Menge der zweiten und 315 Liter; in 9 Stunden würde sie das $7\frac{1}{2}$ fache der zweiten Röhre und 630 Liter liefern.
- III. Die Lieferung der zweiten Röhre in $7\frac{1}{2}$ und in 6 Stunden ist um $2340 - 630 = 1710$ Liter verschieden. Die zweite Röhre liefert somit in $1\frac{1}{2}$ Stunden 1710 Liter oder in 1 Stunde $1710 \times \frac{2}{3} = 1140$ Liter.
- IV. Die erste Röhre liefert stündlich $\frac{780 + 2280}{3} = 1020$ Liter.

Antwort: Die erste Röhre liefert in jeder Minute 17 Liter, die zweite 19 Liter.

2. Pfalz. 1884.

Ein Lehrer hat als Nebeneinkünfte zwei verschieden einträgliche Privatstunden und eine Gemeindeschreiberei. Die erste Privatstunde bringt mit der Gemeindeschreiberei dreimal so viel ein als die zweite Privatstunde ohne Gemeindeschreiberei. Die zweite Privatstunde trägt aber mit der Gemeindeschreiberei $\frac{1}{5}$ mehr als doppelt so viel als die erste Privatstunde ohne Gemeindeschreiberei. Wie hoch beläuft sich der Ertrag einer jeden der beiden Privatstunden, wenn die Gemeindeschreiberei 280 *M* bringt?

1. Lösung.

Wenn die erste Privatstunde x *M*., die zweite y *M*. trägt, so ist

$$\begin{array}{ll} \text{I.} & x + 280 = 3y \\ \text{II.} & 2,2x = y + 280 \\ \text{III.} & 2,2(3y - 280) = y + 280 \\ & 6,6y - y = 3,2 \times 280 \\ & y = \frac{32 \times 280}{56} = 160 \text{ } M. \\ & x = 480 - 280 = 200 \text{ } M. \end{array}$$

Antwort: Die eine Privatstunde trägt 200 *M*. ein, die andere 160 *M*.

2. Lösung.

- I. Die erste Privatstunde trägt so viel wie die dreifache zweite weniger 280 *M*.

- II. $2\frac{1}{5}$ mal die Einnahme aus der ersten Privatstunde beträgt so viel wie die zweite und 280 $\mathcal{M}$., demnach ist die Einnahme aus der ersten Privatstunde so groß wie $\frac{5}{11}$ der Einnahme aus der zweiten und $\frac{5}{11} \times 280 \mathcal{M}$.
- III. Die dreifache zweite Privatstunde weniger 280 $\mathcal{M}$. trägt so viel wie $\frac{5}{11}$ derselben und $\frac{5}{11} \times 280 \mathcal{M}$.
- IV. Der Unterschied der dreifachen und $\frac{5}{11}$ fachen Einnahme aus der zweiten Privatstunde ist $\frac{5}{11} \times 280 + 280 = \frac{16}{11} \times 280$. Somit sind $\frac{28}{11}$ der Einnahme $\frac{16}{11} \times 280 \mathcal{M}$. oder die zweite Privatstunde bringt 160 $\mathcal{M}$. ein, die erste aber $3 \times 160 - 280 = 480 - 280 = 200 \mathcal{M}$.
- Antwort: Der Ertrag der ersten Privatstunde ist 200 $\mathcal{M}$., derjenige der zweiten 160 $\mathcal{M}$.

1. Mittelfranken. 1889.

Drei Ökonomen kaufen ein Gut für 30 000 $\mathcal{M}$. Keiner besitzt aber so viel, daß er allein den Kaufpreis erlegen könnte. B bedürfte dazu noch $\frac{1}{6}$ vom Vermögen des A; C zu seinem Vermögen noch $\frac{4}{5}$ von B, und A zu seinem ganzen Vermögen noch $\frac{7}{9}$ von C. Wie groß ist das Vermögen eines jeden?

Lösung.

Wird das Vermögen des A mit x $\mathcal{M}$., des B mit y $\mathcal{M}$. und des C mit z $\mathcal{M}$. bezeichnet, so ist

I.	$\frac{1}{6}x + y =$	30 000
II.	$\frac{4}{5}y + z =$	30 000
III.	$x + \frac{7}{9}z =$	30 000
IV = 16 $\times$ I	$15x + 16y =$	480 000
V = 20 $\times$ II	$16y + 20z =$	600 000
VI = 9 $\times$ III	$9x + 7z =$	270 000
VII = V — IV	$-15x + 20z =$	120 000
VIII = 3 $\times$ VII	$-45x + 60z =$	360 000
IX = 5 $\times$ VI	$45x + 35z =$	1 350 000
X = VIII + IX	$95z =$	1 710 000
	$z =$	18 000 $\mathcal{M}$.
	$x =$	16 000 $\mathcal{M}$.
	$y =$	15 000 $\mathcal{M}$.

Antwort: A besitzt 16 000 $\mathcal{M}$., B 15 000 $\mathcal{M}$. und C 18 000 $\mathcal{M}$.

1. Niederbayern. 1893.

Wenn jemand von A, einem seiner Kreditoren, noch 1400 *M.* entlehnt und damit seinen Gläubigern B und C je 700 *M.* zurückzahlt, so ist er den beiden letzteren nunmehr $1\frac{7}{10}$ mal so viel schuldig als dem A; borgt er aber von B noch 900 *M.* und zahlt davon dem A 600 *M.* und dem C 300 *M.*, so schuldet er dem A und C zusammen $1\frac{1}{4}$ mal so viel als dem B; und läßt er sich von C 1200 *M.* leihen, um dem A und B je 600 *M.* zurückzuzahlen, so ist er dem C im ganzen $\frac{4}{5}$ mal so viel schuldig als dem A und B zusammen; wie viel jedem?

Lösung.

Die dem A, B und C schuldigen Summen seien *x M.*, *y M.* und *z M.*; dann ist

I.		$y + z - 1400 = 1,7(x + 1400)$
II.		$x + z - 900 = 1,25(y + 900)$
III.		$z + 1200 = 0,8(x + y - 1200)$
III.		$z = 0,8x + 0,8y - 960 - 1200$
		$z = 0,8x + 0,8y - 2160$
IV (z in I. substit.)		$y + 0,8x + 0,8y - 2160 - 1400 = 1,7x + 2380$
V (z in II. substit.)		$x + 0,8x + 0,8y - 2160 - 900 = 1,25y + 1125$
IV.		$1,8y - 0,9x = 5940$
V.		$-0,45y + 1,8x = 4185$
VI = 2 × IV		$3,6y - 1,8x = 11880$
V.		$-0,45y + 1,8x = 4185$
VII = VI + V		$3,15y = 16065$
		$y = 5100 \text{ M.}$
		$x = \frac{1,8 \times 5100 - 5940}{0,9} = 3600 \text{ M.}$
		$z = 2880 + 4080 - 2160 = 4800 \text{ M.}$

Antwort: A hatte 3600 *M.*, B 5100 *M.* und C 4800 *M.* zu fordern.

1. Niederbayern. 1892.

Eine Hausfrau dinge zwei Mägde; jede sollte ein paar Schuhe und ein Hauskleid und außerdem 80 *M.* Jahreslohn erhalten. Die eine Magd mußte sich schon beim Antritte des Dienstes die Schuhe erbitten, trat aber nach 6 Monaten aus dem Dienste und erhielt noch 45,5 *M.*; die andere brauchte alsbald ihr Hauskleid; sie verließ den Dienst nach 9 Monaten und bekam 62,5 *M.* Wie teuer war das Kleid? wie teuer die Schuhe?

1. Lösung.

Bezeichnet x $\mathcal{M}$ den Wert des Hauskleides und y $\mathcal{M}$ den Wert der Schuhe, so ist

$$\begin{array}{rcl}
 \text{I} & \frac{x + y + 80}{2} & = y + 45,5 \\
 \text{II} & \frac{3}{4}(x + y + 80) & = x + 62,5 \\
 \text{III} = 2 \times \text{I} & x + y + 80 & = 2y + 91 \\
 \text{IV} = 4 \times \text{II} & 3x + 3y + 240 & = 4x + 250 \\
 \hline
 \text{V} = \text{III} & x - y & = 11 \\
 \text{VI} = \text{IV} & -x + 3y & = 10 \\
 \hline
 \text{VII} = \text{V} + \text{VI} & 2y & = 21 \\
 & y & = 10\frac{1}{2} \mathcal{M} \text{ somit } x = 21\frac{1}{2} \mathcal{M}.
 \end{array}$$

2. Lösung.

- I. Die erste Magd hat den halben Wert der Schuhe, des Kleides und 40 $\mathcal{M}$ verdient, dagegen $45\frac{1}{2}$ $\mathcal{M}$ und die Schuhe erhalten. Demgemäß mußte der halbe Wert des Kleides so viel betragen wie der halbe Wert der Schuhe und $5\frac{1}{2}$ $\mathcal{M}$ oder das Kleid war 11 $\mathcal{M}$ mehr wert als die Schuhe.
 - II. Die zweite Magd hatte $\frac{3}{4}$ des Wertes des Kleides, der Schuhe und 60 $\mathcal{M}$ verdient, dagegen 62,5 $\mathcal{M}$ und die Schuhe erhalten. Sie hat somit statt $\frac{3}{4}$ des Wertes der Schuhe $\frac{1}{4}$ des Wertes des Kleides und 2,5 $\mathcal{M}$ erhalten. Da nun $\frac{1}{4}$ des Wertes des Kleides gleich ist $\frac{3}{4}$ des Wertes der Schuhe weniger 2,5 $\mathcal{M}$, so war das ganze Kleid so viel wert wie 3 Paar Schuhe weniger 10 $\mathcal{M}$.
 - III. Der Wert des Kleides war so groß wie derjenige von 3 Paar Schuhen weniger 10 $\mathcal{M}$ oder wie ein Paar Schuhe und 11 $\mathcal{M}$. Der Unterschied des Wertes von 3 Paar und 1 Paar Schuhen ist 21 $\mathcal{M}$; also kosteten 2 Paar Schuhe 21 $\mathcal{M}$ oder das Paar $10\frac{1}{2}$ $\mathcal{M}$. Der Wert des Kleides war $10\frac{1}{2} + 11 = 21\frac{1}{2}$ $\mathcal{M}$.
- Antwort: Das Kleid kostete $21\frac{1}{2}$ $\mathcal{M}$, die Schuhe $10\frac{1}{2}$ $\mathcal{M}$.

1. Pfalz. 1887.

Drei Lehrer haben zusammen 219 Schüler. Da diese sehr ungleich verteilt sind, gibt A den 10. und C den 6. Teil seiner Kinder an B. Nachdem diese Umschulung vollzogen ist, haben A und B gleichviele, C aber 3 Schüler mehr als A. Wie viele Kinder hatte jeder Lehrer vor der Umschulung? (Probe!)

1. Lösung.

Hätte nach der Umschulung C nicht 3 Schüler mehr gehabt, so wären in jeder Schule $\frac{219-3}{3} = 72$ Schüler gewesen. Also hatte A 72 Schüler, B ebenfalls 72 und C 75 Schüler. Da A bei der Umschulung $\frac{1}{10}$ seiner Schüler abgegeben hatte, so betrug seine Schülerzahl nur mehr $\frac{9}{10}$; mithin war diese vor der Umschulung 80. C hat $\frac{1}{6}$ seiner Schüler abgegeben und nur $\frac{5}{6}$ behalten; somit hatte er vorher 90 Schüler. B hatte $219 - 170 = 49$ Schüler.

2. Lösung.

Wenn die Zahl der Schüler mit x, y und z bezeichnet wird, so ist

I	$x + y + z = 219$
II	$\frac{9}{10}x = y + \frac{x}{10} + \frac{z}{6}$
III	$\frac{9}{10}x = \frac{5}{6}z - 3$
I	$x + y + z = 219$
IV = 30 × II	$24x - 30y - 5z = 0$
V = 30 × III	$27x \quad - 25z = -90$
VI = 30 × I	$30x + 30y + 30z = 6570$
IV	$24x - 30y - 5z = 0$
VII = VI + IV	$54x + 25z = 6570$
V	$27x - 25z = -90$
VIII = VII + V	$81x = 6480$
	$x = 80 \text{ Schüler}$
	$z = \frac{27 \times 80 + 90}{25} = 90 \text{ Schüler}$
	$y = 219 - 80 - 90 = 49 \text{ Schüler.}$

Antwort: A hatte 80, B hatte 49 und C 90 Schüler.

Probe.

Gibt A den 10. Teil d. i. 8 ab, so hat er noch 72 Schüler. C hat, nachdem er $\frac{9}{6} = 15$ Schüler abgegeben hat, noch 75 Schüler. B erhält zu 49 noch 8 und 15, hat also 72 Schüler. Somit haben A und B je 72 Schüler, C aber um 3 Schüler mehr.

2. Schwaben. 1887.

Eine Anzahl Arbeiter verdiente bei einer Arbeit an jedem Tage eine gewisse Summe. Wären es 5 Arbeiter mehr gewesen und hätte jeder Arbeiter 60 $\mathcal{M}$ mehr erhalten, so würde die verdiente Summe im ganzen 30 $\mathcal{M}$ größer gewesen sein. Wären es aber 3 Arbeiter weniger

gewesen und hätte jeder 40 S weniger erhalten, so würde die Summe 15,8 M weniger betragen. Wie viele Arbeiter waren es anfangs und wie viel verdiente jeder?

1. Lösung.

Wenn die Anzahl der Arbeiter x war und jeder täglich y M verdiente, so war der Gesamtverdienst xy . Es verdienten $(x+5)$ Arbeiter bei $(y+\frac{3}{5})$ M Taglohn $(x+5)(y+\frac{3}{5})=xy+5y+\frac{3}{5}x+3$ und $(x-3)$ Arbeiter bei $(y-\frac{2}{5})$ M Taglohn $(x-3)(y-\frac{2}{5})=xy-3y-\frac{2}{5}x+1,2$. Gemäß der Angabe ist

$$\begin{array}{rcl} \text{I.} & xy + 0,6x + 5y + 3 & = xy + 30 \\ \text{II.} & xy - 0,4x - 3y + 1,2 & = xy - 15,8 \\ \hline & \text{I.} & 0,6x + 5y = 27 \\ & \text{II.} & -0,4x - 3y = -17 \\ \hline \text{III} & = 2 \times \text{I} & 1,2x + 10y = 54 \\ \text{IV} & = 3 \times \text{II} & -1,2x - 9y = -51 \\ \hline \text{V} & = \text{III} + \text{IV} & y = 3 \text{ M} \\ & & x = 20 \text{ Arbeiter.} \end{array}$$

2. Lösung.

Der Mehrverdienst im zweiten Falle rührt daher, daß die x Arbeiter je 60 Pfennige mehr erhielten und daß weitere 5 Arbeiter den früheren Lohn (y M) und noch je 60 S erhielten. Es war also I. $\frac{3}{5}x + 5y + 3 = 30$. Im dritten Falle erhielten x Arbeiter je $\frac{2}{5}$ M weniger; dann waren es 3 Arbeiter weniger, wodurch der Gesamtverdienst sich noch um $(3y - 3 \times \frac{2}{5})$ M verringerte. Demnach war II. $\frac{2}{5}x + 3y - 1,2 = 15,8$.

$$\begin{array}{rcl} \text{I.} & \frac{3}{5}x + 5y & = 27 \\ \text{II.} & \frac{2}{5}x + 3y & = 17 \\ \hline \text{III} & = 2 \times \text{I} & \frac{6}{5}x + 10y = 54 \\ \text{IV} & = 3 \times \text{II} & \frac{6}{5}x + 9y = 51 \\ \hline \text{V} & = \text{III} - \text{IV} & y = 3 \text{ M} \\ & & x = 20 \text{ Arbeiter.} \end{array}$$

Antwort: Die anfängliche Zahl der Arbeiter betrug 20; jeder verdiente täglich 3 M .

4. Oberpfalz 1881.

E, F und G haben eine Erbschaft so unter sich geteilt, daß E und F zusammen 4800 M , F und G zusammen 6300 M haben, und daß sich der Anteil des E zu dem des G verhält, wie 11:6. Wie viel hat jeder von der Erbschaft bekommen?

Lösung.

Wenn E hat x $\mathcal{M}$, F hat y $\mathcal{M}$ und G hat z $\mathcal{M}$ bekommen, so ist

$$\begin{array}{ll}
 \text{I.} & x + y = 4800 \\
 \text{II.} & y + z = 6300 \\
 \text{III.} & x : z = 6 : 11 \\
 \hline
 \text{IV} = \text{II} - \text{I} & z - x = 1500 \\
 \text{III.} & z = \frac{11}{6} x \\
 \hline
 \text{V.} & \frac{11}{6} x - x = 1500 \\
 & 5x = 1500 \times 6 \\
 & x = 1800 \mathcal{M} \\
 & y = 4800 - 1800 = 3000 \mathcal{M} \\
 & z = 6300 - 3000 = 3300 \mathcal{M}
 \end{array}$$

Antwort: A hat 1800 $\mathcal{M}$, B hat 3000 $\mathcal{M}$ und C hat 3300 $\mathcal{M}$ bekommen.

1. Mittelfranken. 1891.

Ein Kapitalist erwirbt zwei Häuser und möbliert sämtliche Räume derselben zum Vermiethen. Die Möbel des ersten Hauses kommen auf 5850 $\mathcal{M}$, die des anderen auf 7350 $\mathcal{M}$ zu stehen. Durch die Möblirung sind beide Häuser so im Wert gestiegen, daß der des ersten Hauses zu dem des zweiten wie 5 : 7 sich verhält. Stellt der Käufer aber die für das erste Haus bestimmten Möbel in das zweite und die für das zweite bestimmten in das erste, so verhalten sich die Werte wie 19 : 25. Welchen Wert hat jedes der Häuser ohne Möbel?

Lösung.

Wenn man den Wert des ersten Hauses mit x $\mathcal{M}$, denjenigen des zweiten Hauses mit y $\mathcal{M}$ bezeichnet, so ist

$$\begin{array}{ll}
 \text{I.} & (x + 5850) : (y + 7350) = 5 : 7 \\
 \text{II.} & (x + 7350) : (y + 5850) = 19 : 25 \\
 \hline
 \text{I.} & 7x + 40950 = 5y + 36750 \\
 \text{II.} & 25x + 183750 = 19y + 111150 \\
 \hline
 \text{I.} & 7x - 5y = -4200 \\
 \text{II.} & 25x - 19y = -72600 \\
 \hline
 \text{III} = 25 \times \text{I} & 175x - 125y = -105000 \\
 \text{IV} = 7 \times \text{II} & 175x - 133y = -508200 \\
 \hline
 \text{V} = \text{III} - \text{IV} & 8y = 403200 \\
 & y = 50400 \mathcal{M} \\
 & x = 35400 \mathcal{M}
 \end{array}$$

Antwort: Der Wert des ersten Hauses ist 35400 $\mathcal{M}$, derjenige des zweiten 50400 $\mathcal{M}$.

2. Schwaben. 1893.

Drei Personen haben zusammen 5400 *M* geerbt. Diese Summe soll derart verteilt werden, daß das Erbteil der ersten Person nebst dem vierten Teile des Erbteiles der zweiten Person, sowie das Erbteil der zweiten nebst dem achten Teile des Erbteils der dritten Person 2050 *M* beträgt. Wie viel erhält jede Person?

Lösung.

Werden die Erbteile mit x , y und z bezeichnet, dann ist

$$\text{I. } x + y + z = 5400 \text{ } M$$

$$\text{II. } x + \frac{y}{4} = 2050 \text{ } M$$

$$\text{III. } y + \frac{z}{8} = 2050 \text{ } M$$

$$\text{IV} = \text{I} - \text{II} \quad \frac{3}{4}y + z = 3350 \text{ } M$$

$$\text{V} = 8 \times \text{III} \quad 8y + z = 16400 \text{ } M$$

$$\text{VI} = \text{V} - \text{IV} \quad 7\frac{1}{4}y = 13050 \text{ } M$$

$$y = \frac{13050 \times 4}{29} = 450 \times 4 = 1800 \text{ } M$$

$$z = 3350 - 1350 = 2000 \text{ } M$$

$$x = 5400 - 1800 - 2000 = 1600 \text{ } M$$

Antwort: A erhält 1600 *M*, B 1800 *M* und C 2000 *M*.

1. Oberfranken. 1890.

Das hinterlassene Vermögen für drei noch unmündige Kinder besteht in 10 975 *M*, ist nach deren Alter verschieden unter sie verteilt und vom Vormund zu 5% in einer Handlung untergebracht worden. Das erste Kind heiratet nach 7 Jahren, das zweite nach 10 und das dritte nach 12 Jahren, und doch bekamen alle drei Kinder an Kapitalien und einfachen Zinsen gleichviel als Heiratsgut. Wie war das Vermögen verteilt worden?

Lösung.

Wenn für das erste Kind x *M*, für das zweite y *M* und für das dritte z *M* angelegt worden sind, so betragen Kapital und Zinsen für das erste Kind $1,35x$ *M*, für das zweite $1,5y$ *M* und für das dritte Kind $1,6z$.

Ferner ist

I.	$x + y + z = 10975$
II.	$1,35x = 1,50y$
III.	$1,35x = 1,60z$
IV = II : 1,50	$\frac{9}{10}x = y$
V = III : 1,60	$\frac{27}{32}x = z$
VI (y u. z in I gesetzt)	$x + \frac{9}{10}x + \frac{27}{32}x = 10975$
VII = 160 × VI	$160x + 144x + 135x = 10975 \times 160$
	$439x = 10975 \times 160$
	$x = 25 \times 160$
	$x = 4000 \text{ M.}$
	$y = 3600 \text{ M.}$
	$z = 3375 \text{ M.}$

Antwort: Das älteste Kind erhielt 4000 M., das nächst jüngere 3600 M., das jüngste 3375 M.

3. Pfalz. 1888.

Zwei Fässer sind teilweise mit Wein gefüllt. Soll das Faß A ganz gefüllt werden, so muß aus B $\frac{1}{5}$ seines Inhaltes und 2 Liter in A gegossen werden, und A enthält nun 3mal so viel als der Rest in B beträgt. Sollte dagegen B ganz gefüllt werden, so müßte von dem ursprünglich in A befindlichen Wein $\frac{1}{5}$ und 4 Liter genommen und in B gefüllt werden, und letzteres enthielte nun $1\frac{1}{2}$ mal so viel als der Rest in B beträgt. Wie viel war ursprünglich in jedem Fasse und wie viel geht in jedes?

Lösung.

Wenn der Inhalt der zwei Fässer x und y Liter beträgt, so ist:

I.	$x + \frac{y}{5} + 2 = 3 \times (\frac{4}{5}y - 2)$
II.	$y + \frac{x}{5} + 4 = \frac{3}{2} \times (\frac{4}{5}x - 4)$
III.	$x - \frac{11}{5}y = -8$
IV.	$-x + y = -10$
V = III + IV	$-\frac{6}{5}y = -18$
	$y = 15 \text{ Liter}$
	$x = 25 \text{ Liter.}$

Antwort: Ursprünglich waren im ersten Fasse 25 Liter, im zweiten 15 Liter; das erste Faß konnte 30 Liter fassen, das zweite 24 Liter.

2. Oberbayern. 1893.

Ein Grundbesitzer hat drei Grundstücke im Werte von 10 250 $\mathcal{M}$, welche einen jährlichen Gewinn von 365 $\mathcal{M}$ abwerfen, wenn man die Rente des ersten Gutes zu 3%, die des zweiten zu 3,5% und die des dritten zu 4% annimmt. Der Reinertrag des dritten Grundstückes beträgt 12 $\mathcal{M}$ weniger als der des zweiten. Welches ist der Wert eines jeden Grundstückes?

Lösung.

Wenn man die Werte der Grundstücke der Reihe nach mit x $\mathcal{M}$, y $\mathcal{M}$ und z $\mathcal{M}$ bezeichnet, so ist

$$\begin{array}{ll}
 \text{I.} & x + y + z = 10250 \\
 \text{II.} & \frac{3x}{100} + \frac{3,5y}{100} + \frac{4z}{100} = 365 \\
 \text{III.} & \frac{3,5y}{100} - \frac{4z}{100} = 12 \\
 \hline
 \text{IV} = \frac{3}{100} \times \text{I} & \frac{3x}{100} + \frac{3y}{100} + \frac{3z}{100} = 307,5 \\
 \text{II.} & \frac{3x}{100} + \frac{3,5y}{100} + \frac{4z}{100} = 365 \\
 \hline
 \text{V} = \text{II} - \text{IV} & \frac{0,5y}{100} + \frac{z}{100} = 57,5 \\
 \text{VI} = 4 \times \text{V} & \frac{2x}{100} + \frac{4z}{100} = 230 \\
 \text{III.} & \frac{3,5y}{100} - \frac{4z}{100} = 12 \\
 \hline
 \text{VII} = \text{VI} + \text{III} & \frac{5,5y}{100} = 242
 \end{array}$$

$$y = \frac{242000}{55} = 4400 \mathcal{M}$$

$$z = 5750 - 2200 = 3550 \mathcal{M}$$

$$x = 2300 \mathcal{M}$$

Antwort: Der Wert der Grundstücke beträgt 2300 $\mathcal{M}$, 4400 $\mathcal{M}$ und 3550 $\mathcal{M}$.

1. Oberbayern. 1891.

Jemand besitzt drei Gärten, welche zusammen einen Wert von 9000 $\mathcal{M}$ haben; der erste wirft eine jährliche Rente von 8%, der zweite von 5%, der dritte von 9% ab. Der jährliche Nutzen aller drei Gärten beträgt zusammen 650 $\mathcal{M}$ und zwar derjenige vom ersten und zweiten 290 $\mathcal{M}$ mehr als vom dritten. Welchen Wert hat jeder Garten?

1. Lösung.

Da der erste und zweite Garten 290 $\mathcal{M}$. mehr abwerfen als der dritte, so geben diese beiden zusammen die Rente von $\frac{650 + 290}{2} = 470$ $\mathcal{M}$., während der dritte Garten 180 $\mathcal{M}$. abwirft. Daraus folgt, daß der Kapitalwert des dritten Gartens $\frac{180}{9} \times 100 = 2000$ $\mathcal{M}$. beträgt. Der Kapitalwert der beiden anderen Gärten ist 7000 $\mathcal{M}$. Würden sie beide eine jährliche Rente von 5% liefern, so würde diese 350 $\mathcal{M}$. sein. Sie ist aber $470 - 350 = 120$ $\mathcal{M}$. größer, weil je 100 $\mathcal{M}$. des ersten Garten 3 $\mathcal{M}$. mehr abwerfen. Daraus folgt, daß der erste Garten $\frac{120}{3} \times 100 = 4000$ $\mathcal{M}$., der zweite aber 3000 $\mathcal{M}$. wert ist.

2. Lösung.

Bezeichnet x, y und z die Werte der drei Gärten, so ist

$$\begin{array}{ll}
 \text{I.} & x + y + z = 9000 \\
 \text{II.} & \frac{8x}{100} + \frac{5y}{100} + \frac{9z}{100} = 650 \\
 \text{III.} & \frac{8x}{100} + \frac{5y}{100} - \frac{9z}{100} = 290 \\
 \hline
 \text{IV} = \text{II} - \text{III} & \frac{18z}{100} = 360 \\
 & z = 2000 \mathcal{M}. \\
 \text{V (z in I substit.)} & x + y = 7000 \\
 \text{VI (z in II substit.)} & \frac{8x}{100} + \frac{5y}{100} = 470 \\
 \hline
 \text{VII} = \frac{8}{100} \times \text{V} & \frac{8x}{100} + \frac{8y}{100} = 560 \\
 \text{VI.} & \frac{8x}{100} + \frac{5y}{100} = 470 \\
 \hline
 \text{VIII} = \text{VII} - \text{VI} & \frac{3y}{100} = 90 \\
 & y = 3000 \mathcal{M}. \\
 & x = 4000 \mathcal{M}.
 \end{array}$$

Antwort: Die drei Gärten sind 4000 $\mathcal{M}$., 3000 $\mathcal{M}$. und 2000 $\mathcal{M}$. wert.

2. Pfalz. 1892.

Jemand hat Gelegenheit 23 000 $\mathcal{M}$. als sicheres Kapital anzulegen. Da er aber gerade nur 15 000 $\mathcal{M}$. besitzt, so nimmt er die noch fehlenden 8000 $\mathcal{M}$. zu einem geringeren Zinsfuß auf und behält, nachdem er die Zinsen für diese bezahlt hat, jährlich 905 $\mathcal{M}$. an Zinsen

übrig. Unter denselben Bedingungen nimmt er ein anderes Mal 9400 $\mathcal{M}$. auf und verleiht 17500 $\mathcal{M}$. Dies bringt ihm jährlich einen reinen Gewinn von 539,5 $\mathcal{M}$. Zu wie viel Prozent hat er Geld ausgeliehen und aufgenommen?

Lösung.

Wenn x die Prozente der ausgeliehenen, y der entlehnten Kapitalien bezeichnet, so ist

$$\begin{array}{rcl} \text{I.} & 230x - 80y = & 905 \\ \text{II.} & 175x - 94y = & 539,5 \\ \text{III} = 35 \times \text{I} & 230 \times 35x - 2800y = & 31675 \\ \text{IV} = 46 \times \text{II} & 175 \times 46y - 4324y = & 24817 \\ \text{V} = \text{III} - \text{IV} & 1524y = & 6858 \\ & y = & 4,5\% \\ & x = \frac{905 + 360}{230} = \frac{1265}{230} = & 5,5\%. \end{array}$$

Antwort: Die ausgeliehenen Kapitalien warfen 5,5% ab; für die entlehnten wurden 4,5% bezahlt.

3. Unterfranken. 1881.

Jemand kann 11500 $\mathcal{M}$. als ein sicheres Kapital anlegen; er besitzt aber nur 7500 $\mathcal{M}$. so daß er genötigt ist, noch 4000 $\mathcal{M}$. jedoch zu geringeren Prozenten aufzunehmen, wodurch er einen jährlichen Zinsenüberschuß von 452,50 $\mathcal{M}$. erzielt. Unter den gleichen Bedingungen nimmt er ein andermal 4700 $\mathcal{M}$. auf und verleiht 8750 $\mathcal{M}$. wobei er jährlich 269,75 $\mathcal{M}$. gewinnt; zu wie viel Prozent hat er das Geld aufgenommen und ausgeliehen?

Lösung.

Beim Ausleihen seien x Prozent erhalten und beim Borgen y Prozent bezahlt worden; dann ist

$$\begin{array}{rcl} \text{I.} & 11500 \times \frac{x}{100} - 4000 \times \frac{y}{100} = & 452,50 \\ \text{II.} & 8750 \times \frac{x}{100} - 4700 \times \frac{y}{100} = & 269,75 \\ \text{III} = 10 \times \text{I} & 1150x - 400y = & 4525 \\ \text{IV} = 100 \times \text{II} & 8750x - 4700y = & 26975 \\ \text{VI} = \text{III} : 25 & 46x - 16y = & 181 \\ \text{VII} = \text{IV} : 25 & 350x - 188y = & 1079 \\ \text{VIII} = 47 \times \text{VI} & 2162x - 752y = & 8507 \\ \text{IX} = 4 \times \text{VII} & 1400x - 752y = & 4316 \\ \text{X} = \text{VIII} - \text{IX} & 762x = & 4191 \\ & x = & 5,5\% \\ \text{VI} & 46 \times 5,5 - 16y = & 181 \\ & 253 - 181 = 16y & \\ & y = \frac{72}{16} = & 4,5\%. \end{array}$$

Antwort: Das Geld wurde zu 4,5% aufgenommen und zu 5,5% ausgeliehen.

1. Pfalz. 1889.

Es kauft jemand ein Haus um 24 600 $\mathcal{M}$ und nimmt dazu ein Kapital von 11 200 $\mathcal{M}$ zu niederen Prozents auf, wodurch er einen jährlichen Überschuß von 1179 $\mathcal{M}$ an Zinsen hat. Später kauft er ein zweites Haus für 13 800 $\mathcal{M}$ und nimmt dazu 8400 $\mathcal{M}$ zu denselben Prozents auf, was ihm einen jährlichen Überschuß von 582 $\mathcal{M}$ an Zinsen einbringt. Zu wie viel Prozent war das entlehnte Geld aufgenommen, und wie hoch verinteressierten sich die Häuser, wenn beide gleiche Prozente abwarfen?

Lösung.

Wenn $x\%$ den Zinsfuß bezeichnet, zu welchem die Kapitalien ausgeliehen waren, und $y\%$ den Zinsfuß, der für die entlehnten Kapitalien entrichtet wurde, so ist

$$\begin{array}{ll} \text{I.} & 246x - 112y = 1179 \\ \text{II.} & 138x - 84y = 582 \\ \text{III} = 3 \times \text{I} & 738x - 336y = 3537 \\ \text{IV} = 4 \times \text{II} & 552x - 336y = 2328 \\ \text{V} = \text{III} - \text{IV} & 186x = 1209 \\ & x = 6,5\% \\ & y = \frac{138 \times 6,5 - 582}{84} = 3,75\%. \end{array}$$

Antwort: Für die entlehnten Kapitalien wurden 3,75% bezahlt, für die ausgeliehenen 6,5% eingenommen.

2. Mittelfranken. 1886.

Ein Weinhändler verkauft zweierlei Sorten Wein, und zwar von der ersten Sorte die Flasche mit 15% Gewinn, von der zweiten mit 3% Verlust, und löst so beim Verkaufe für 1 Flasche der ersten und 1 Flasche der zweiten Sorte 9,45 $\mathcal{M}$. Später gibt er 4 Flaschen der ersten Sorte mit 20% Gewinn und 5 Flaschen der zweiten Sorte mit 4% Gewinn ab, indem er für diese 9 Flaschen 45,20 $\mathcal{M}$ einnimmt. Wie teuer hat er die Flasche von jeder Sorte gekauft?

Lösung.

I. Bei 15% Gewinn beträgt die Einnahme, wenn der Einkaufspreis x $\mathcal{M}$ ist, $x + x \times \frac{15}{100} = 1,15x$ $\mathcal{M}$. Bei 3% Verlust ist die Einnahme aus y $\mathcal{M}$ Einkauf $y - y \times \frac{3}{100} = 0,97y$ $\mathcal{M}$.

II. Beträgt die Ausgabe $4x$ und der Gewinn 20% , so ist die Einnahme $4x + 4x \times \frac{20}{100} = 4,8x \text{ M.}$ Ist die Ausgabe $5y$ M. und der Gewinn 4% , so beträgt die Einnahme $5y + 5y \times \frac{4}{100} = 5,2y$. Somit ist

$$\begin{array}{rcl} \text{I.} & 1,15x + 0,97y & = 9,45 \\ \text{II.} & 4,8x + 5,2y & = 45,20 \\ \text{III} = 12 \times \text{I} & 13,8x + 11,64y & = 113,40 \\ \text{IV} = \frac{11,5}{4} \times \text{II} & 13,8x + 14,95y & = 129,95 \\ \text{V} = \text{IV} - \text{III} & 3,31y & = 16,55 \\ & y & = 5 \text{ M.} \\ & x = \frac{11,3 - 6,5}{1,2} = \frac{4,8}{1,2} & = 4 \text{ M.} \end{array}$$

Antwort: Die Flasche der ersten Sorte kostet 4 M., eine Flasche der zweite Sorte 5 M.

1. Pfalz. 1885.

Ein Kaufmann A verkaufte Waren, und zwar die eine mit 10% Gewinn, die andere mit 3% Verlust. Von diesen beiden Waren setzt er eine bestimmte Menge an einen Händler B ab und erhält 32 M. mehr, als ihm die an B verkaufte Ware gekostet hat. Einem anderen Kaufmann C verkaufte er von der ersten Ware doppelt so viel und von der zweiten Ware dreimal so viel, als B erhalten hat, und nimmt dafür 46 M. mehr ein, als der Einkaufspreis beider Waren zusammen betrug. Wie viel hatte der Händler B dem Kaufmann zu bezahlen?

1. Lösung.

Wenn B um x M. von der ersten Ware bezogen hat, so war der Einkaufspreis, um den A dieselbe Ware erhalten hatte, $\frac{10x}{11}$. Bei der zweiten Ware habe B um y M. bezogen, und A habe dafür $\frac{100y}{97}$ bezahlt. Somit ist

$$\begin{array}{rcl} \text{I.} & x + y & = \frac{10}{11}x + \frac{100}{97}y + 32 \\ \text{II.} & 2x + 3y & = 2 \times \frac{10}{11}x + 3 \times \frac{100}{97}y + 46 \\ & \frac{x}{11} - \frac{3y}{97} & = 32 \\ \text{II.} & \frac{2x}{11} - \frac{9y}{97} & = 46 \\ \text{III} = 2 \times \text{I} & \frac{2x}{11} - \frac{6y}{97} & = 64 \\ \text{II} & \frac{2x}{11} - \frac{9y}{97} & = 46 \\ \text{IV} = \text{III} - \text{II} & \frac{3}{97}y & = 18 \\ & y & = 582 \text{ M.} \\ & x = 50 \times 11 & = 550 \text{ M.} \\ & x + y & = 1132 \text{ M.} \end{array}$$

2. Lösung.

A habe die erste Ware um v $\mathcal{M}$, die zweite um z $\mathcal{M}$ eingekauft, dann ist

$$\begin{array}{l} \text{I.} \quad \frac{v}{10} - \frac{3z}{100} = 32 \\ \text{II.} \quad \frac{2v}{10} - \frac{9z}{100} = 46 \end{array}$$

$$v = 500 \text{ } \mathcal{M} \text{ und } z = 600 \text{ } \mathcal{M}.$$

Beim Verkauf an B hat A 50 $\mathcal{M}$ an der ersten Ware gewonnen, und 18 $\mathcal{M}$ an der zweiten verloren. Demnach erhielt A von B:

$$500 + 50 + 600 - 18 = 1132 \text{ } \mathcal{M}.$$

3. Lösung.

Hätte A an B die doppelte Menge Waren verkauft, so hätte er 64 $\mathcal{M}$ Gewinn erhalten. Diese doppelte Menge unterscheidet sich von der an C verkauften dadurch, daß C an der zweiten Ware um so viel mehr erhielt, als A an B verkauft hatte. Da aber A von C nur 46 $\mathcal{M}$, also um $64 - 46 = 18$ $\mathcal{M}$ weniger erhielt, so hatte A an der zweiten an B verkauften Ware 18 $\mathcal{M}$ verloren. Hieraus folgt, daß A die zweite Ware um 600 $\mathcal{M}$ gekauft und an der ersten Waare $(32 + 18)$ $\mathcal{M} = 50$ $\mathcal{M}$ gewonnen hat. Der Preis, um welchen A die erste Ware erhalten hat, ist $50 \times 10 = 500$ $\mathcal{M}$.

Antwort: B mußte an A bezahlen: $500 + 50 + 600 - 18 = 1132$ $\mathcal{M}$.

1. Niederbayern. 1885.

Jemand hatte zwei Kapitalien; das eine brachte $3\frac{2}{3}\%$ Zins, das andere 12% Gewinn. Das zweite trug in 4 Jahren 7 Monaten so viel als das erste in $7\frac{1}{2}$ Jahren. Für das erste mußte er $1\frac{3}{8}\%$ für das zweite $1\frac{7}{8}\%$ Steuer zahlen, im ganzen 83,25 $\mathcal{M}$. Wie reich war er?

Lösung.

Bezeichnet x $\mathcal{M}$ das erste Kapital, so ist der Zins bei $3\frac{2}{3}\%$ in $7\frac{1}{2}$ Jahren $x \times \frac{11}{300} \times \frac{15}{2}$ $\mathcal{M}$. Der Gewinn des zweiten Kapitals (y) bei 12% in 4 Jahren 7 Monaten beträgt $y \times \frac{12}{100} \times \frac{55}{12}$ $\mathcal{M}$. Die jährlichen Steuern sind $x \times \frac{11}{8000}$ und $y \times \frac{15}{8000}$. Somit ist

$$\begin{array}{l} \text{I.} \quad x \times \frac{11}{300} \times \frac{15}{2} = y \times \frac{12}{100} \times \frac{55}{12} \\ \text{II.} \quad x \times \frac{11}{8000} + y \times \frac{15}{8000} = 83,25 \\ \text{III} = 200 \times \text{I} \quad 55x = 2 \times 55y \\ \text{IV} = \text{III} : 55 \quad x = 2y \\ \text{V} = 8000 \times \text{II} \quad 11x + 15y = 666\,000 \\ \text{Substitutione} \quad 22y + 15y = 666\,000 \\ \quad y = 18\,000 \text{ } \mathcal{M} \\ \quad x = 36\,000 \text{ } \mathcal{M} \\ \quad x + y = 54\,000 \text{ } \mathcal{M} \end{array}$$

Antwort: Das Vermögen betrug 54 000 $\mathcal{M}$.

1. Pfalz. 1892.

Ein Gutsbesitzer hat drei Grundstücke im Werte von 10 605 *M.*, welche einen jährlichen Reingewinn von 482 *M.* abwerfen, wenn man die Rente des ersten Grundstückes zu 4%, die des zweiten zu 4½% und des dritten zu 5% annimmt. Der Reinertrag des dritten Grundstückes ist 5 *M.* weniger als derjenige des zweiten. Welches ist der Wert eines jeden der drei Grundstücke?

1. Lösung.

Wird der Wert der Grundstücke mit *x*, *y* und *z* bezeichnet, so ist

I.	$x + y + z = 10\,605$
II.	$x \times \frac{4}{100} + y \times \frac{4,5}{100} + z \times \frac{5}{100} = 482$
III.	$y \times \frac{4,5}{100} - z \times \frac{5}{100} = 5$
IV = $\frac{5}{100} \times I$	$\frac{5x}{100} + \frac{5y}{100} + \frac{5z}{100} = 530,25$
III.	$\frac{4,5y}{100} - \frac{5z}{100} = 5$
V = IV + III	$\frac{5x}{100} + \frac{9,5y}{100} = 535,25$
VI = III + II	$\frac{4x}{100} + \frac{9y}{100} = 487$
VII = 400 × V	$20x + 38y = 214\,100$
VIII = 500 × IV	$20x + 45y = 243\,500$
IX = VIII — VII	$7y = 29\,400$
$y = 4200 \text{ } M.$ $z = 0,9 \times 4200 - 100 = 3680 \text{ } M.$ $x = 1065 - 7880 = 2725 \text{ } M.$	

Antwort: Der Wert der Grundstücke war 2725 *M.*, 4200 *M.* und 3680 *M.*

1. Mittelfranken. 1887.

Jemand hat nach 2, 4 und 6 Jahren gewisse Summen Geldes, welche zusammen 9520 *M.* ausmachen, heimzuzahlen. Wollte er gegen 5% einfachen Rabatt dieselben jetzt bar erlegen, so dürfte er nur 7800 *M.*, und würde er nach 2 Jahren bei gleichem Rabatt alles auf einmal erlegen, so dürfte er nur 8500 *M.* heimbezahlen. Wie groß sind die Teilsummen?

Lösung.

- I. Bezeichnen x $\mathcal{M}$, y $\mathcal{M}$ und z $\mathcal{M}$ die Schuldsommen, so sind sind die Barzahlungen $\frac{10}{11}x$, $\frac{10}{12}y$ und $\frac{10}{13}z$, da a) 110 $\mathcal{M}$ Schuld = 100 $\mathcal{M}$ bar, b) 120 $\mathcal{M}$ Schuld = 100 $\mathcal{M}$ bar und c) 130 $\mathcal{M}$ Schuld = 100 $\mathcal{M}$ bar sind.
- II. Bei der Heimzahlung nach 2 Jahren wird für x $\mathcal{M}$ kein Rabatt gewährt; die Zahlungen der beiden anderen Teilsummen sind $\frac{10}{11}y$ und $\frac{10}{12}z$. Nun ist

$$\begin{array}{ll}
 \text{I.} & x + y + z = 9520 \\
 \text{II.} & \frac{10x}{11} + \frac{10y}{12} + \frac{10z}{13} = 7800 \\
 \text{III.} & x + \frac{10y}{11} + \frac{10z}{12} = 8500 \\
 \hline
 \text{IV} = \text{I} : 11 & \frac{x}{11} + \frac{y}{11} + \frac{z}{11} = \frac{9520}{11} \\
 \text{V} = \text{II} : 10 & \frac{x}{11} + \frac{y}{12} + \frac{z}{13} = 780 \\
 \hline
 \text{VI} = \text{IV} - \text{V} & \frac{y}{11 \times 12} + \frac{2z}{11 \times 13} = \frac{9520 - 8580}{11} \\
 \text{VII} = 11 \times \text{VI} & \frac{y}{12} + \frac{2z}{13} = 940 \\
 \text{VIII} = \text{I} - \text{III} & \frac{y}{11} + \frac{2z}{12} = 1020 \\
 \hline
 \text{IX} = 12 \times \text{VII} & y + \frac{24z}{13} = 11280 \\
 \text{X} = 11 \times \text{VIII} & y + \frac{22z}{12} = 11220 \\
 \hline
 \text{XI} = \text{IX} - \text{X} & \frac{24z}{13} - \frac{22z}{12} = 60 \\
 \text{XII} = \text{XI} : 2 & \frac{12z}{13} - \frac{11z}{12} = 30 \\
 & z \left(\frac{144 - 143}{156} \right) = 30 \\
 & z = 156 \times 30 = 4680 \mathcal{M} \\
 & y = 11220 - 8580 = 2640 \mathcal{M} \\
 & x = 9520 - 7320 = 2200 \mathcal{M}
 \end{array}$$

Antwort: Die Teilsummen sind 2200 $\mathcal{M}$, 2640 $\mathcal{M}$ und 4680 $\mathcal{M}$.

4. Oberpfalz. 1892.

Auf welche Summe lautet ein Wechsel, und wann ist er fällig, wenn er mit $\frac{3}{4}\%$ monatlichem Diskonto bar mit 222 $\mathcal{M}$., mit $\frac{3}{5}\%$ monatlichem Diskonto mit 225,60 $\mathcal{M}$ bar bezahlt wird?

L ö s u n g.

Bezeichnet man die Wechselschuld mit x $\mathcal{M}$ und die Monate Umlaufzeit mit y , so ist

$$\text{I. } x - \frac{3}{4}x \times \frac{y}{100} = 222$$

$$\text{II. } x - \frac{3}{5}x \times \frac{y}{100} = 325,6$$

$$\text{III} = 400 \times \text{I} \quad 400x - 3xy = 88800$$

$$\text{IV} = 500 \times \text{II} \quad 500x - 3xy = 112800$$

$$\text{V} = \text{IV} - \text{III} \quad 100x = 24000$$

$$x = 240 \mathcal{M}$$

$$y = 10 \text{ Monate.}$$

Antwort: Der Wechsel lautete auf 240 $\mathcal{M}$ und war nach 10 Monaten fällig.

1. Oberfranken. 1891.

Jemand läßt sich drei Kleider von derselben Größe anfertigen. Zu dem zweiten braucht er 2 m mehr als zum ersten, da das Tuch um $\frac{1}{3}$ m schmaler ist, als das des ersten Kleides. Das dritte Kleid dagegen erfordert $2\frac{2}{3}$ m weniger, als das zweite, da das Tuch zu jenem $\frac{1}{2}$ m breiter ist, als zu diesem. Wie viel Tuch und von welcher Breite ist zum ersten Kleide erforderlich?

L ö s u n g.

Die Anzahl der Meter zum ersten Kleide betrage x m und die Breite des Tuches y m, dann ist die benötigte Tuchfläche beim ersten Kleide xy , beim zweiten $(x+2)(y-\frac{1}{3})$, beim dritten $(x-\frac{2}{3})(y-\frac{1}{3}+\frac{1}{2})$. Diese Ausdrücke sind einander gleich, daher ist

$$\text{I. } (x+2)(y-\frac{1}{3}) = xy$$

$$\text{II. } (x-\frac{2}{3})(y+\frac{1}{6}) = xy$$

$$\text{III. } -\frac{1}{3}x + 2y = \frac{2}{3}$$

$$\text{IV. } \frac{1}{6}x - \frac{2}{3}y = \frac{1}{9}$$

$$\text{III} \quad -\frac{1}{3}x + 2y = \frac{2}{3}$$

$$\text{V} = 2 \times \text{IV} \quad \frac{1}{3}x - \frac{4}{3}y = \frac{2}{9}$$

$$\text{VI} = \text{III} + \text{V} \quad \frac{2}{3}y = \frac{8}{9}$$

$$y = \frac{4}{3} \text{ m}$$

$$x = 6 \text{ m.}$$

Antwort: Zum ersten Kleide waren nötig 6 m Tuch mit $\frac{4}{3}$ m Breite.

„ zweiten „ „ 8 m „ 1 m „
 „ dritten „ „ $5\frac{1}{3}$ m „ $1\frac{1}{2}$ m „

1. Schwaben. 1893.

Von zwei Kapitalien, die zusammen 8000 *M.* betragen, war das erste zu 4%, das zweite zu $4\frac{1}{2}\%$ ausgeliehen. Die Zinsen des ersten Kapitals verhalten sich zu jenen des zweiten wie 4:3. a) Wie groß war jedes der beiden Kapitalien? b) Wie viel Jahreszins trug jedes?

Lösung.

Bezeichnet man die beiden Kapitalien mit x *M.* und y *M.*, dann ist

$$\text{I. } x + y = 8000$$

$$\text{II. } x \times \frac{4}{100} : y \times \frac{4,5}{100} = 4 : 3$$

$$\text{II. } x : 1,5 y = 1 : 1$$

$$\text{Folglich } 2x = 3y$$

$$\text{Somit ist } y = \frac{8000}{5} \times 2 = 3200 \text{ } M.$$

$$x = 8000 - 3200 = 4800 \text{ } M.$$

Die jährlichen Zinsen des ersten Kapitals betragen $48 \times 4 = 192$ *M.*,
 des zweiten Kapitals $32 \times \frac{9}{2} = 144$ *M.*

Antwort: Die Kapitalien waren 4800 *M.* und 3200 *M.*; sie brachten 192 *M.* und 144 *M.* Zinsen.

2. Unterfranken. 1891.

Von zwei Kapitalien geben $\frac{1}{4}$ des ersten zu $3\frac{3}{4}\%$ und $\frac{2}{5}$ des zweiten zu $4\frac{1}{4}\%$ zusammen in 6 Jahren 327,90 *M.* Zins. Der Rest des ersteren zu $5\frac{1}{2}\%$ und der Rest des zweiten zu $4\frac{3}{4}\%$ geben in 2 Jahren $277\frac{1}{5}$ *M.* Zins. Wie groß ist jedes der beiden Kapitalien?

Lösung.

$$\text{I. Die jährlichen Zinsen betragen } \frac{327,90}{6} + \frac{277,20}{2} = 54,65 + 138,60 = 193,25 \text{ } M.$$

$$\text{II. Bei } 3\frac{3}{4}\% \text{ gibt } \frac{x}{4} \text{ in einem Jahre } \frac{x}{4} \times \frac{15}{100} \text{ und } \frac{2y}{5} \text{ bei } 4\frac{1}{4}\% \text{ geben } \frac{2}{5}y \times \frac{4,25}{100} \text{ } M. \text{ Zinsen.}$$

$$\text{III. Bei } 5\frac{1}{2}\% \text{ geben } \frac{3}{4}x \text{ im Jahre } \frac{3}{4}x \times \frac{11}{100} \text{ } M. \text{ und } \frac{3}{5}y \text{ geben bei } 4\frac{3}{4}\% \frac{3}{5}y \times \frac{19}{100} \text{ } M. \text{ Zinsen.}$$

Somit ist

$$\begin{aligned}
 \text{I.} \quad & \frac{15x}{1600} + \frac{8,5y}{500} = 54,65 \\
 \text{II.} \quad & \frac{33x}{800} + \frac{57y}{2000} = 138,60 \\
 \text{III} = 22 \times \text{I} \quad & \frac{165x}{800} + \frac{187y}{500} = 1202,3 \\
 \text{IV} = 5 \times \text{II} \quad & \frac{165x}{800} + \frac{285y}{2000} = 693 \\
 \text{V} = \text{III} - \text{IV} \quad & y \left(\frac{187}{500} - \frac{285}{2000} \right) = 509,3 \\
 & y (748 - 285) = 509,3 \times 2000 \\
 & y = \frac{5093 \times 200}{463} = 11 \times 200 \\
 & y = 2200 \text{ M} \\
 & x = \left(\frac{138,6 - 62,7}{33} \right) 800 = \frac{75,9}{33} \times 800 = 2,3 \times 800 \\
 & x = 1840 \text{ M.}
 \end{aligned}$$

Antwort: Die beiden Kapitalien sind 1840 M und 2200 M.

5. Oberpfalz. 1886.

Drei Kapitalien betragen zusammen 40 000 M. Das erste ist zu 5%, das zweite zu 4%, das dritte zu 3% ausgeliehen. Die Jahreszinsen betragen zusammen 1609 M, und zwar die Jahreszinsen des zweiten Kapitales um 50 M mehr als die des ersten. Wie groß ist jedes Kapital?

Lösung.

Bezeichnen x M, y M und z M die drei Kapitalien, so ist

$$\begin{aligned}
 \text{I.} \quad & x + y + z = 40000 \\
 \text{II.} \quad & x \times \frac{5}{100} + y \times \frac{4}{100} + z \times \frac{3}{100} = 1609 \\
 \text{III.} \quad & x \times \frac{5}{100} = y \times \frac{4}{100} - 50 \\
 \text{IV} = 5 \times \text{I} \quad & 5x + 5y + 5z = 200000 \\
 \text{V} = 100 \times \text{II} \quad & 5x + 4y + 3z = 160900 \\
 \text{VI} = \text{IV} - \text{V} \quad & y + 2z = 39100 \\
 \text{VII} = 100 \times \text{III} \quad & 5x - 4y = -5000 \\
 \text{VIII} = \text{IV} - \text{VII} \quad & 9y + 5z = 205000 \\
 \text{IX} = 5 \times \text{VI} \quad & 5y + 10z = 195500 \\
 \text{X} = 2 \times \text{VIII} \quad & 18y + 10z = 410000 \\
 \text{XI} = \text{X} - \text{IX} \quad & 13y = 214500 \\
 \text{Aus VI} \quad & z = \frac{39100 - 16500}{2} = 11300 \text{ M} \\
 \text{Aus I} \quad & x = 40000 - 27800 = 12200 \text{ M} \\
 & y = 16500 \text{ M}
 \end{aligned}$$

Antwort: Die drei Kapitalien waren 12200 M, 16500 M und 11300 M groß.

3. Schwaben. 1895.

Ein Mann besitzt drei Gärten, die zusammen 7000 *M.* wert sind. Der erste Garten bringt einen Gewinn von 9%, der zweite von 6% und der dritte von 10%. Der jährliche Gewinn aus den drei Gärten beträgt zusammen 580 *M.* und zwar vom ersten und zweiten 380 *M.* mehr, als vom dritten. Welchen Wert hatte jeder Garten?

Lösung.

- I. Der dritte Garten lieferte eine Rente von 200 *M.* bei 10%, war also 2000 *M.* wert.
 II. Der Wert des ersten Gartens sei x *M.*, des zweiten y *M.*, dann ist

$$\begin{array}{ll} \text{I.} & x + y = 5000 \\ \text{II.} & \frac{9}{100}x + \frac{6}{100}y = 380 \\ \text{III} = \frac{9}{100} \times x & \frac{9}{100}x + \frac{9}{100}y = 450 \\ \text{II.} & \frac{9}{100}x + \frac{6}{100}y = 380 \\ \text{IV} = \text{III} - \text{II} & \frac{3}{100}y = 70 \\ & y = \frac{7000}{3} = 2333\frac{1}{3} \text{ *M.*} \\ & x = 2666\frac{2}{3} \text{ *M.*} \end{array}$$

Antwort: Der erste Garten war $2666\frac{2}{3}$ *M.*, der zweite $2333\frac{1}{3}$ *M.*, der dritte 2000 *M.* wert.

1. Unterfranken. 1894.

Ein Kaufmann bezieht von zwei Sorten Waren zusammen 100 kg. Von der einen Sorte kostet das kg 1 *M.*, von der anderen 1,50 *M.* Die Unkosten betragen $8\frac{1}{3}\%$. Er sieht sich genötigt, die ganze Ware für 117 *M.* zu verkaufen und verliert dadurch an seiner Auslage 10%. Wie viele kg hat er von jeder Sorte gekauft?

1. Lösung.

- I. Da 10% verloren worden sind, so waren die Auslagen zusammen $117 \times \frac{10}{9} = 130$ *M.* Hievon waren die Spesen $\frac{130}{13} = 10$ *M.*; also betrug die Einkaufssumme 120 *M.*
 II. Hätten alle kg je 1 *M.* gekostet, so hätte die Einkaufssumme 100 *M.* betragen; sie war aber 20 *M.* mehr, weil auch Ware zu 1,5 *M.* per kg gekauft wurde, und zwar $20 : 0,5 = 40$ kg.
 III. Von der Ware, von welcher jedes kg 1 *M.* kostete, wurden 60 kg bezogen.

2. Lösung.

- I. Wenn x kg à 1 *M.* bezogen wurden, so war der Bezug der teureren Sorte $(100 - x)$ und deren Preis $1,5 (100 - x)$.

II. Beim Einkauf wurden $x + 150 - 1,5x = (150 - 0,5x)$ $\mathcal{M}$. ausgegeben; hiezu die Spesen mit $\left(\frac{150 - 0,5x}{12}\right)$, so daß die Ausgaben betragen $(150 - 0,5x) + \left(\frac{150 - 0,5x}{12}\right) = \frac{13}{12}(150 - 0,5x)$ $\mathcal{M}$.

III. Von dieser Summe wurden verloren $\frac{13}{12} \left(\frac{150 - 0,5x}{10}\right)$. Es

betrug daher die Einnahme $\frac{13}{12}(100 - 0,5x)$. $\frac{9}{10} = 117$; also

$$\frac{13}{12} \times \frac{9}{10} (150 - 0,5x) = 117$$

$$150 - 0,5x = \frac{117 \times 12 \times 10}{9 \times 13} = 120$$

$$30 = 0,5x$$

$$x = 60 \text{ kg à } 1 \mathcal{M}.$$

$$40 \text{ kg à } 1,50 \mathcal{M}.$$

Antwort: Der Kaufmann hat 60 kg à 1 $\mathcal{M}$ und 40 kg à 1,50 $\mathcal{M}$ gekauft.

2. Oberbayern. 1886.

Jemand versichert 2 Häuser, und zwar das eine mit $\frac{3}{8}\%$, das andere mit $\frac{1}{5}\%$ der Versicherungssumme. Die jährliche Prämie beträgt 64 $\frac{4}{5}$ $\mathcal{M}$. Sie würde jedoch nur 57 $\frac{1}{10}$ $\mathcal{M}$ betragen, wenn er umgekehrt das erste Haus mit $\frac{1}{5}\%$ und das zweite mit $\frac{3}{8}\%$ hätte versichern lassen. Wie hoch war jedes Haus versichert?

Lösung.

Wenn die Versicherungssumme für das erste Haus x $\mathcal{M}$, für das zweite y $\mathcal{M}$ beträgt, so ist

$$\text{I. } x \times \frac{3}{800} + y \times \frac{1}{500} = 64,8$$

$$\text{II. } x \times \frac{1}{500} + y \times \frac{3}{800} = 57,1$$

$$\text{III} = \text{I} + \text{II} \quad x \times \frac{23}{4000} + y \times \frac{23}{4000} = 121,9$$

$$\text{IV} = \text{III} : \frac{23}{4000} \quad x + y = 5,3 \times 4000 = 21200$$

$$\text{V} = 500 \times \text{II} \quad x + \frac{15}{8}y = 28550$$

$$\text{VI} = \text{V} - \text{IV} \quad \frac{7}{8}y = 7350$$

$$y = 1050 \times 8 = 8400 \mathcal{M}$$

$$x = 21200 - 8400 = 12800 \mathcal{M}$$

Antwort: Das erste Haus war mit 12800 $\mathcal{M}$, das zweite mit 8400 $\mathcal{M}$ versichert.

2. Mittelfranken. 1885.

Drei Personen, A, B und C, haben Kapitalien ausstehen. B hat 1100 $\mathcal{M}$ mehr ausgeliehen als A und erhält $\frac{1}{4}\%$ mehr als dieser; deshalb nimmt er jährlich 68 $\mathcal{M}$ mehr Zins ein als A. C hat 2600 $\mathcal{M}$

mehr ausstehen als B und bezieht $\frac{3}{4}\%$ mehr als dieser. Aus diesem Grunde bekommt er jährlich 202 $\mathcal{M}$ mehr Zins als B. Wie groß ist das Kapital von jeder dieser drei Personen, und wie viel Prozent erhält jeder? (Ist algebraisch*) zu lösen.)

Lösung.

I. A hat x $\mathcal{M}$ Kapital zu $y\%$ ausgeliehen und erhält $x \times \frac{y}{100}$ $\mathcal{M}$ Zins.

II. B hat $(x + 1100)$ $\mathcal{M}$ Kapital zu $(y + \frac{1}{4})\%$ ausgeliehen und erhält $(x + 1100) \left(\frac{y + 0,25}{100} \right)$ $\mathcal{M}$ Zins.

III. C hat $(x + 3700)$ $\mathcal{M}$ Kapital zu $(y + 1)\%$ ausgeliehen und erhält $(x + 3700) \left(\frac{y + 1}{100} \right)$ $\mathcal{M}$ Zins. Nun ist

$$\text{I. } (x + 1100) \left(\frac{y + 0,25}{100} \right) - x \times \frac{y}{100} = 68$$

$$\text{II. } (x + 3700) \left(\frac{y + 1}{100} \right) - x \times \frac{y}{100} = 68 + 202$$

$$\text{I. } \frac{xy}{100} + 11y + \frac{0,25x}{100} - \frac{xy}{100} = 68 - 11 \times 0,25$$

$$\text{II. } \frac{xy}{100} + 37y + \frac{x}{100} - \frac{xy}{100} = 270 - 37$$

$$\text{I. } 11y + \frac{0,25x}{100} = 65\frac{1}{4}$$

$$\text{II. } 37y + \frac{x}{100} = 233$$

$$\text{III} = 4 \times \text{I}$$

$$44y + \frac{x}{100} = 261$$

$$\text{II.}$$

$$37y + \frac{x}{100} = 233$$

$$\text{IV} = \text{III} - \text{II}$$

$$7y = 28$$

$$y = 4\%$$

$$x = (261 - 44 \times 4)100 = 8500 \mathcal{M}$$

$$x + 1100 = 9600 \mathcal{M}$$

$$y + \frac{1}{4} = 4\frac{1}{4}\%$$

$$x + 3700 = 12200 \mathcal{M}$$

$$y + 1 = 5\%$$

Antwort: A hatte 8500 $\mathcal{M}$ zu 4%, B 9600 $\mathcal{M}$ zu $4\frac{1}{4}\%$ und C 12200 $\mathcal{M}$ zu 5% ausgeliehen.

*) Die algebraische Lösung ist ausdrücklich verlangt worden.

2. Oberbayern. 1881.

A und B gründen ein Geschäft, das ihnen einen jährlichen Gewinn von 1809 $\mathcal{M}$ abwirft. A hatte dazu 3600 $\mathcal{M}$ weniger hergegeben als B, mußte aber wegen Abwesenheit des B eine zeitlang das Geschäft allein besorgen und erhielt dafür eine besondere Vergütung vom Gewinn vorab, wodurch sein Gesamtgewinn nur 81 $\mathcal{M}$ hinter dem des B zurückblieb. Bei der Berechnung ergibt sich, daß mit Anrechnung der besonderen Vergütung die Prozente des A zu denen des B sich verhalten, wie 8:7. Wie viel hat jeder zum Geschäfte hergegeben? Wie viele Prozente hat jeder von seiner Einlage erhalten?

Lösung.

I. Zieht man 81 von 1809 ab, so ist der Rest gleichheitlich unter A und B zu teilen. Somit erhält A am Gewinne $\frac{1809 - 81}{2} = 864 \mathcal{M}$ und B erhält $864 + 81 = 945 \mathcal{M}$.

II. A hat $x \mathcal{M}$ eingelegt und y Prozente erhalten. Hieraus berechnet sich als Gewinn $\frac{x y}{100}$. Somit ist

$$\frac{x y}{100} = 864 \text{ und } y = \frac{86400}{x}$$

B hat $(x + 3600) \mathcal{M}$ eingelegt und z Prozente erhalten. Demnach ist

$$\frac{(x + 3600) z}{100} = 945 \text{ und } z = \frac{94500}{x + 3600}$$

III. Gemäß der Angabe ist

$$\frac{86400}{x} : \frac{94500}{x + 3600} = 8:7$$

$$\frac{7 \times 864}{x} = \frac{8 \times 945}{x + 3600}$$

$$\frac{108}{x} = \frac{135}{x + 3600}$$

$$108(x + 3600) = 135x$$

$$135x = 108x + 108 \times 3600$$

$$27x = 108 \times 3600$$

$$x = 4 \times 3600 = 14400 \mathcal{M}$$

IV. Nach II ist

$$y = \frac{86400}{14400} = 6 \text{ Prozente.}$$

V. A hat **14400 $\mathcal{M}$** , B hat $14400 \mathcal{M} + 3600 = 18000 \mathcal{M}$ eingelegt. A hat **6 Prozente**, B hat $\frac{6 \times 7}{8} = 5\frac{1}{4}$ **Prozente** seiner Einlage erhalten.

1. Mittelfranken. 1892.

Zwei Kaufleute legen ihre Kapitalien zusammen, um gemeinsamen Handel zu treiben. Nach 5 Monaten zieht jedoch A sein Geld zurück und B beendet 1 Monat später sein Geschäft, welches im ganzen 7600 *M* Gewinn abwirft. Zu einer zweiten gemeinschaftlichen Unternehmung gibt A sein anfängliches Kapital auf 7 Monate und B das seinige auf 8 Monate. Sie gewinnen hiebei zusammen 10 400 *M*. Ein drittes Mal handeln sie wieder zusammen, und zwar gibt A hiezu sein anfängliches Kapital und noch 600 *M*, beides auf 4 Monate, während das Kapital des B 5 Monate im Geschäfte bleibt. Ihr gemeinschaftlicher Gewinn beträgt 6440 *M*. Wie viel betragen die erwähnten Kapitalien des A und B, wenn der Gewinn bei allen drei Geschäften verhältnismäßig gleich groß war?

Lösung.

Bezeichnen x *M*. und y *M*. die eingelegten Kapitalien und z % die monatlichen Gewinnprozente, so ist

$$\text{I.} \quad x \times \frac{5z}{100} + y \times \frac{6z}{100} = 7600$$

$$\text{II.} \quad x \times \frac{7z}{100} + y \times \frac{8z}{100} = 10400$$

$$\text{III.} \quad (x + 600) \times \frac{4z}{100} + y \times \frac{5z}{100} = 6440$$

$$\text{I.} \quad (5x + 6y) \frac{z}{100} = 7600$$

$$\text{II.} \quad (7x + 8y) \frac{z}{100} = 10400$$

$$\text{III.} \quad (4x + 2400 + 5y) \frac{z}{100} = 6440$$

$$\text{IV} = \text{II} : \text{I} \quad \frac{7x + 8y}{5x + 6y} = \frac{104}{76} = \frac{26}{19}$$

$$\text{V} = \text{III} : \text{I} \quad \frac{4x + 5y + 2400}{5x + 6y} = \frac{644}{760} = \frac{161}{190}$$

$$\text{VI} = 19(5x + 6y) \times \text{IV} \quad \begin{aligned} 133x + 152y &= 130x + 156y \\ 3x &= 4y \\ y &= \frac{3}{4}x = 0,75x \end{aligned}$$

$$\text{VII (y in V gesetzt)} \quad \begin{aligned} \frac{4x + 3,75x + 2400}{5x + 4,5x} &= \frac{161}{190} \\ \frac{7,75x + 2400}{9,5x} &= \frac{161}{190} \end{aligned}$$

$$\text{VIII} = \text{VII } M \ 9,5x \quad \frac{7,75x + 2400}{20} = \frac{161x}{20}$$

$$155x + 48000 = 161x$$

$$48000 = 6x$$

$$x = 8000 \text{ } M$$

$$y = 6000 \text{ } M$$

Antwort: Das Kapital des A war 8000 *M*, dasjenige des B 6000 *M*.

2. Oberfranken. 1889.

Der Kaufmann A gewinnt mit einem gewissen Kapital jährlich $16\frac{2}{3}\%$. Nach 3 Jahren verbindet sich mit ihm zu demselben Geschäft der Kaufmann B mit einem um 3000 $\mathcal{M}$ geringeren Kapitale als das des A war. 4 Jahre nach dieser Verbindung gesellt sich ein dritter Kaufmann C zu ihnen, welcher 6000 $\mathcal{M}$ mehr hergibt als B. Als nach einer bestimmten Anzahl von Jahren das Geschäft aufgelöst wurde, bekam C 12500 $\mathcal{M}$ weniger an Gewinn als A, B 3000 $\mathcal{M}$ mehr als C. Wie viele Mark gab jede Person und auf wie lange?

Lösung.

Wenn x $\mathcal{M}$ das Kapital des A und y die Zahl der Jahre seines Geschäftsbetriebes bezeichnet, so hat

A x $\mathcal{M}$ Kapital während y Jahre und gewinnt bei $16\frac{2}{3}\%$ $\frac{xy}{6}$

B $(x - 3000)$ $\mathcal{M}$ Kapital während $(y - 3)$ Jahre und gewinnt bei $16\frac{2}{3}\%$ $\left(\frac{x - 3000}{6}\right)(y - 3)$

C $(x + 3000)$ $\mathcal{M}$ Kapital während $(y - 7)$ Jahre und gewinnt bei $16\frac{2}{3}\%$ $\left(\frac{x + 3000}{6}\right)(y - 7)$

Gemäß der Angabe ist

$$\text{I.} \quad \frac{(x + 3000)(y - 7)}{6} = \frac{xy}{6} - 12500$$

$$\text{II.} \quad \frac{(x - 3000)(y - 3)}{6} = \frac{xy}{6} - 9500$$

$$\text{III} = 6 \times \text{I} \quad (x + 3000)(y - 7) = xy - 75000$$

$$\text{IV} = 6 \times \text{II} \quad (x - 3000)(y - 3) = xy - 57000$$

$$\text{III.} \quad xy - 7x + 3000y - 21000 = xy - 75000$$

$$\text{IV.} \quad xy - 3x - 3000y + 9000 = xy - 57000$$

$$\text{III.} \quad -7x + 3000y = -54000$$

$$\text{IV.} \quad -3x - 3000y = -66000$$

$$\text{V} = \text{III} + \text{IV} \quad -10x = -120000$$

$$x = 12000 \mathcal{M}$$

$$y = \frac{84 - 54}{3} = 10 \text{ Jahre.}$$

Antwort: A gab 12 000 $\mathcal{M}$ auf 10 Jahre, B 9000 $\mathcal{M}$ auf 7 Jahre, C 15 000 $\mathcal{M}$ auf 3 Jahre.

2. Oberbayern. 1890.

Jemand hatte ein Kapital auf Zinsen. Wäre sein Kapital um 100 *M.* größer, stände aber um $\frac{1}{2}\%$ niedriger, so hätte er jährlich 35 *M.* Zinsen weniger. Wäre sein Kapital um 500 *M.* kleiner, stände aber $\frac{1}{2}\%$ höher, so hätte er jährlich 50 *M.* Zinsen mehr. Wie groß ist das Kapital und der Prozentsatz?

1. Lösung.

I. Bei x *M.* Kapital und $y\%$ betragen die Zinsen $x \times \frac{y}{100}$

II. Bei $(x + 1000)$ *M.* Kapital und $(y - 0,5)\%$ betragen die Zinsen

$$(x + 1000) \left(\frac{y - 0,5}{100} \right) = \frac{xy}{100} + 10y - \frac{x}{200} - 5$$

III. Bei $(x - 500)$ *M.* Kapital und $(y + 0,5)\%$ betragen die Zinsen

$$(x - 500) \left(\frac{y + 0,5}{100} \right) = \frac{xy}{100} - 5y + \frac{x}{200} - 2,5$$

Der Angabe entsprechend ist

$$\text{I. } \frac{xy}{100} + 10y - \frac{x}{200} - 5 - \frac{xy}{105} = -35$$

$$\text{II. } \frac{xy}{100} - 5y + \frac{x}{200} - 2,5 - \frac{xy}{100} = 50$$

$$\text{I. } 10y - \frac{x}{200} = -30$$

$$\text{II. } -5y + \frac{x}{200} = 52,5$$

$$\text{III} = \text{I} + \text{II}$$

$$5y = 22,5$$

$$y = 4\frac{1}{2}\%$$

$$x = 15000 \text{ M.}$$

2. Lösung.

Wäre das Kapital um 1000 *M.* größer, der Zinsfuß um $\frac{1}{2}\%$ niedriger, so würde das Kapital x um $\frac{x}{200}$ *M.* weniger Zins bringen, dagegen würden 1000 *M.* um $10y - 5$ *M.* mehr Zins bringen, so daß $\frac{x}{200} - (10y - 5) = 35$ wäre. Wäre dagegen das Kapital um 500 *M.* kleiner, aber der Zinsfuß $\frac{1}{2}\%$ höher, so wäre die Zunahme an Zins $\frac{x}{200}$, die Abnahme $(5y + 2,5)$, so daß $\frac{x}{200} - 5y - 2,5 = 50$ wäre.

Es ist mithin

$$\text{I. } \frac{x}{200} - 10y = 30$$

$$\text{II. } \frac{x}{200} - 5y = 52,5$$

$$\text{III} = \text{II} - \text{I} \quad 5y = 22,5$$

$$y = 4\frac{1}{2}\%$$

$$x = 15000 \text{ M.}$$

Antwort: Es waren **15000 M.** zu **4½%** ausgeliehen worden.

1. Niederbayern. 1888.

A und B haben zusammen 4700 M. Kapital ausgeliehen und nehmen in 3 Jahren 694,5 M. Zinsen ein. Würde das Kapital des A durch das des B dividiert, so ergäbe sich als Quotient 5 und als Rest 500. Würde der Zinsfuß beider Kapitalien gewechselt, so betrüge der 3 jährige Zins 49,5 M. weniger. Zu wie viel Prozent sind beide Kapitalien ausgeliehen?

1. Lösung.

A. Das Kapital des A sei x M., dasjenige des B $(4700 - x)$ M., dann ist

$$x = 5(4700 - x) + 500$$

$$x = 23500 - 5x + 500$$

$$6x = 24000$$

$$x = 4000 \text{ M. Kapital des A}$$

$$700 \text{ M. Kapital des B.}$$

B. Der Zinsfuß des A sei y , derjenige des B z , dann ist

$$\text{I. } 4000 \times \frac{3y}{100} + 700 \times \frac{3z}{100} = 694,5$$

$$\text{II. } 4000 \times \frac{3z}{100} + 700 \times \frac{3y}{100} = 645$$

$$\text{I. } 120y + 21z = 694,5$$

$$\text{II. } 120z + 21y = 645$$

$$\text{III} = \text{I} + \text{II} \quad 120(y + z) + 21(y + z) = 1344,5$$

$$141(y + z) = 1339,5$$

$$\text{IV. } y + z = 9,5$$

$$\text{V} = \text{I} - \text{II} \quad 120(y - z) - 21(y - z) = 49,5$$

$$99(y - z) = 49,5$$

$$\text{VI. } y - z = 0,5$$

$$\text{VII} = \text{IV} + \text{VI} \quad 2y = 10$$

$$y = 5\%$$

$$z = 4,5\%.$$

Antwort: Das Kapital des A war zu **5%**, dasjenige des B zu **4½%** ausgeliehen.

2. Lösung.

A. Das Kapital des A ist 4000 $\mathcal{M}$, dasjenige des B 700 $\mathcal{M}$.

B. Wird der Zinsfuß gewechselt, so werden jährlich $\frac{49,5}{3} = 16,5 \mathcal{M}$.

an Zins weniger eingenommen, somit ist der Zinsfuß für das Kapital des B kleiner. Bei je 700 $\mathcal{M}$ tritt ein Unterschied im Zins auch nach der Vertauschung des Zinsfußes nicht ein, sondern nur bei 3300 $\mathcal{M}$ des A. Da diese nach der Vertauschung 16,5 $\mathcal{M}$ Zins weniger tragen, so ist der Zinsfuß des B um $\frac{16,5}{33} = \frac{1}{2}\%$ niedriger. Wäre der Zinsfuß des B um $\frac{1}{2}\%$ höher, so würden 700 $\mathcal{M}$ in 3 Jahren 10,5 $\mathcal{M}$ mehr Zins liefern und die 4700 $\mathcal{M}$ Kapitalien würden $694,5 + 10,5 = 705 \mathcal{M}$, somit in 1 Jahre 235 $\mathcal{M}$ abwerfen. Der gemeinsame Zinsfuß wäre dann $\frac{235}{47} = 5 \mathcal{M}$. In Wirklichkeit ist der Zinsfuß des A 5 $\mathcal{M}$, des B 4,5 $\mathcal{M}$.

1. Unterfranken. 1890.

Von zwei Personen, welche gleichviel Vermögen besitzen, hat die erste ihr Geld um $\frac{1}{2}\%$ höher ausgeliehen als die zweite. Das Vermögen der ersten war dadurch in 8 Jahren 4 Monaten auf 13 750 $\mathcal{M}$, das der zweiten auf 13 900 $\mathcal{M}$ in 9 Jahren und 9 Monaten angewachsen. Wie groß war das Vermögen jeder dieser Personen, und zu wie viel Prozent hat jede dasselbe angelegt?

Lösung.

Wird das Kapital, das jede Person besitzt, mit $x \mathcal{M}$, die Prozente des B mit y bezeichnet, so sind die Zinsen, welche A in $8\frac{1}{3}$ Jahren erhält, $x \times \left(\frac{y + 0,5}{100}\right) \times \frac{25}{3} = \frac{25 x (y + 0,5)}{300}$. Die Zinsen, welche B in

$9\frac{3}{4}$ Jahren bezieht, sind $x \times \frac{y}{100} \times \frac{39}{4}$. Es ist daher

$$\text{I.} \quad x + \frac{25 x (y + 0,5)}{300} = 13 750$$

$$\text{II.} \quad x + \frac{39 x y}{400} = 13 900$$

$$\text{III} = 12 \times \text{I} \quad 12 x + x y + 0,5 x = 165 000$$

$$\text{IV} = 400 \times \text{II} \quad 400 x + 39 x y = 5 560 000$$

$$\text{V} = 39 \times \text{III} \quad 12,5 \times 39 x + 39 x y = 6 435 000$$

$$\text{IV} \quad 400 x + 39 x y = 5 560 000$$

$$\text{V} = \text{V} - \text{IV} \quad 487,5 x - 400 x = 875 000$$

$$x = 10 000 \mathcal{M}$$

$$y = 4\%$$

Antwort: Jede Person hatte 10 000 $\mathcal{M}$ Kapital. A hatte dasselbe zu $4\frac{1}{2}\%$ und B zu 4% ausgeliehen.

3. Oberpfalz. 1881.

Ein Kapital steht zu 5%, ein anderes zu 4%; sie bringen jährlich $42\frac{3}{5}$ M Zinsen. Vergrößert man das erste Kapital um $\frac{1}{4}$ desselben und vermindert das zweite um $\frac{1}{3}$ desselben, so tragen sie zusammen 40,65 M Zinsen. Wie groß ist jedes Kapital?

Lösung.

I. Ist das erste Kapital x M., so bringt es $\frac{x \times 5}{100}$ M. jährliche Zinsen.

Das um $\frac{1}{4}$ seines Betrages vergrößerte Kapital ist $\frac{5}{4}x$ und bringt jährlich $\frac{5x \times 5}{400}$ M. Zinsen.

II. Beträgt das zweite Kapital y M., so wirft es $\frac{y \times 4}{100}$ M. Zinsen ab, und wenn es um $\frac{1}{3}$ seiner Größe verkleinert wird, so erhält man von demselben $\frac{2}{3} \times \frac{y \times 4}{400} \text{ M.} = \frac{2y}{300}$ M. Zinsen.

III. Gemäß der Angabe ist

$$\text{I.} \quad \frac{5x}{100} + \frac{4y}{100} = 42,60$$

$$\text{II.} \quad \frac{25x}{400} + \frac{2y}{300} = 40,65$$

$$\text{III} = \frac{5}{4} \times \text{I} \quad \frac{25x}{400} + \frac{20y}{400} = \frac{213}{4} = 53,25$$

$$\text{II.} \quad \frac{25x}{400} + \frac{2y}{300} = 40,65$$

$$\text{IV} = \text{III} - \text{II} \quad \frac{20y}{300} - \frac{2y}{400} = 12,60$$

$$\frac{y}{15} - \frac{y}{20} = 12,60$$

$$y = 12,60 \times 60 = 756 \text{ M.}$$

$$\text{I.} \quad \frac{5x}{100} + \frac{3024}{100} = 42,60$$

$$5x + 3024 = 4260$$

$$x = \frac{4260 - 3024}{5} = 247,20 \text{ M.}$$

Antwort: Das erste Kapital ist 247,20 M., das zweite 756 M.

4. Unterfranken. 1886.

Ein Kapital, zu einem gewissen Zinsfuß ausgeliehen, wächst durch die einfachen Zinsen in 10 Jahren auf 3600 *M* an. Würde dasselbe zu 1% mehr ausstehen, so würde es nach Verlauf von 8 Jahren mit den einfachen Zinsen 3552 *M* betragen. Wie groß ist das erwähnte Kapital, und zu wie viel Prozent ist es ausgeliehen?

Lösung.

Wenn man das Kapital mit x *M*. und den Zinsfuß mit y *M*. bezeichnet, so ist

$$\text{I.} \quad x + x \times \frac{y}{100} \times 10 = 3600$$

$$\text{II.} \quad x + x \times \frac{(y+1)}{100} \times 8 = 3552$$

$$\text{III} = 10 \times \text{I} \quad 10x + xy = 36000$$

$$\text{IV} = 100 \times \text{II} \quad 100x + 8xy + 8x = 355200$$

$$\text{V} = 8 \times \text{III} \quad 80x + 8xy = 288000$$

$$\text{IV} \quad 108x + 8xy = 355200$$

$$\text{VI} = \text{IV} - \text{V} \quad 28x = 67200$$

$$x = 2400 \text{ } M.$$

$$\text{III} \quad y = \frac{36000 - 24000}{2400} = 5\%.$$

Antwort: Das Kapital betrug 2400 *M*. und war zu 5% ausgeliehen.

1. Oberfranken. 1888.

Ein Kapitalist hatte eine gewisse Summe Geldes zu einem bestimmten Prozentsatze ausgeliehen und mußte sie zurücknehmen. Könnte er um 1% mehr Zins erhalten, so würde ihm ein um 6000 *M*. vermindertes Kapital so viel Zinsen tragen, als er bisher erhalten hat. Wäre er aber genötigt, den Zins um $\frac{1}{2}\%$ zu erniedrigen, so würde er von einem um 7500 *M*. vergrößerten Kapital doch nur 112,50 *M*. mehr Zins einnehmen als bisher. Wie groß war das heimgezahlte Kapital, und zu wie viel Prozent war es ausgeliehen?

1. Lösung.

I. Wenn man das Kapital mit x *M*., den Zinsfuß mit $y\%$ bezeichnet, so betragen die Zinsen $x \times \frac{y}{100}$

II. Bei $(x - 6000)$ *M*. Kapital und $(y + 1)\%$ sind die Zinsen $(x - 6000) \frac{(y + 1)}{100}$

III. Beträgt das Kapital $(x + 7500)$ $\mathcal{M}$. und der Zinsfuß $(y - 0,5)$, so ergeben sich als Zinsen $(x + 7500) \frac{(y - 0,5)}{100}$. Nun ist

$$\text{I.} \quad (x - 6000) \left(\frac{y + 1}{100} \right) = \frac{xy}{100}$$

$$\text{II.} \quad (x + 7500) \left(\frac{y - 0,5}{100} \right) = \frac{xy}{100} + 112,50$$

$$\text{I.} \quad \frac{xy}{100} - 60(y + 1) + \frac{x}{100} = \frac{xy}{100}$$

$$\text{II.} \quad \frac{xy}{100} - \frac{0,5x}{100} + 75(y - 0,5) = \frac{xy}{100} + 112,50$$

$$\text{I.} \quad x = 6000(y + 1)$$

$$\text{II.} \quad -\frac{x}{200} + 75y = 112,5 + 37,5$$

$$\text{III. (Substit.)} \quad -\frac{6000(y + 1)}{200} + 75y = 150$$

$$-30y - 30 + 75y = 150$$

$$45y = 180$$

$$y = 4\%$$

$$x = 30000 \mathcal{M}.$$

2. Lösung.

I. Wäre der Zinsfuß 1% höher als früher, so würden x $\mathcal{M}$ Kapital $\frac{x}{100}$ $\mathcal{M}$ mehr Zinsen, dagegen ein um 6000 $\mathcal{M}$ kleineres Kapital

$(60y + 60)$ $\mathcal{M}$ weniger Zins tragen, so daß $\frac{x}{100} = 60y + 60$ wäre, da eine Änderung gegen früher nicht eintritt.

II. Würde das Kapital um 7500 $\mathcal{M}$ größer, dagegen der Zinsfuß $(y - 0,5)$ %, so würden x $\mathcal{M}$ Kapital um $\frac{x}{200}$ $\mathcal{M}$ weniger einbringen, dagegen würden 7500 $\mathcal{M}$ an Zinsen $(75y - 37,5)$ $\mathcal{M}$ mehr tragen; es wäre dann

$$\text{II} \quad 75y - 37,5 - \frac{x}{200} = 112,5$$

$$\text{III (Substit.)} \quad 75y - 30y - 30 = 150$$

$$y = 4\%$$

$$x = 30000 \mathcal{M}.$$

Antwort: Das heimbezahlte Kapital betrug 30 000 $\mathcal{M}$. und war zu 4% ausgeliehen.

2. Schwaben. 1892.

B hat 2000 $\mathcal{M}$, C 5000 $\mathcal{M}$ mehr ausgeliehen als A. Dazu hat B sein Kapital um $\frac{1}{2}\%$ und C um 1% höher angelegt als A. Es bezieht daher B jährlich 125 $\mathcal{M}$. und C 320 $\mathcal{M}$. Zinsen mehr als A. Wie viel Kapitalien hat jeder ausgeliehen und zu wie viel Prozent?

1. Lösung.

I. B hat ein so großes Kapital wie A, nämlich x $\mathcal{M}$, um $\frac{1}{2}\%$ höher, dann 2000 zu $(y + 0,5)\%$ mehr ausgeliehen und daher 125 $\mathcal{M}$ mehr eingenommen; somit ist $\frac{x}{200} + 2000 \left(\frac{y + 0,5}{100} \right) = \frac{x}{200} + 20y + 10 = 125$.

II. C hat in ähnlicher Weise x $\mathcal{M}$ um 1% höher und 5000 zu $(y + 1)\%$ ausgeliehen; der Ausdruck hiefür ist $\frac{x}{100} + 50y + 50 = 320$.

III. Nun ist I. $\frac{x}{200} + 20y = 115$

II. $\frac{x}{100} + 50y = 270$

III = $2 \times$ I $\frac{x}{100} + 40y = 230$

II. $\frac{x}{100} + 50y = 270$

IV = II — III $10y = 40$

$y = 4\%$

$x = 7000$ $\mathcal{M}$.

Antwort: A hat **7000** $\mathcal{M}$ zu **4%**, B **9000** zu **4½%** und C **12000** $\mathcal{M}$ zu **5%** ausgeliehen.

2. Lösung.

I. A hat bei x $\mathcal{M}$ Kapital und $y\%$ an Zinsen eingenommen $x \times \frac{y}{100}$

II. B hat bei $(x + 2000)$ $\mathcal{M}$ Kapital und $(y + 0,5)\%$ an Zinsen eingenommen $(x + 2000) \left(\frac{y + 0,5}{100} \right)$.

III. C hat bei $x + 5000$ $\mathcal{M}$ Kapital und $(y + 1)\%$ an Zinsen eingenommen $(x + 5000) \left(\frac{y + 1}{100} \right)$.

Nach den Angaben ist

I. $(x + 2000) \left(\frac{y + 0,5}{100} \right) - \frac{xy}{100} = 125$

II. $(x + 5000) \left(\frac{y + 1}{100} \right) - \frac{xy}{100} = 320$

I. $\frac{xy}{100} + \frac{x}{200} + 20y + 10 - \frac{xy}{100} = 125$

II. $\frac{xy}{100} + \frac{x}{100} + 50y + 50 - \frac{xy}{100} = 320$

I. $\frac{x}{200} + 20y = 115$

$\frac{x}{100} + 50y = 270$

$y = 4\%$

$x = 7000$ $\mathcal{M}$ (wie oben).

1. Mittelfranken. 1890.

Ein Kapitalist B hat 1200 $\mathcal{M}$. mehr ausstehen als A, und die Prozente, welche er erhält, sind um $\frac{1}{4}$ höher als diejenigen vom Kapital des A; aus diesem Grunde nimmt B jährlich $68\frac{1}{2}$ $\mathcal{M}$. mehr Zins ein als jener. C hat ein um 2000 $\mathcal{M}$. größeres Kapital ausstehen als B und erhält $\frac{3}{4}\%$ mehr, als dieser, weshalb C jährlich $161\frac{1}{2}$ $\mathcal{M}$. mehr Zins erhält als B. Wie groß ist das Kapital einer jeden dieser drei Personen, und wie viel Prozent bekommt jede?

1. Lösung.

- I. Kapital des A x $\mathcal{M}$., Zinsfuß y , somit Zins $x \times \frac{y}{100}$
 II. Kapital des B $(x + 1200)$ $\mathcal{M}$., Zinsfuß $y + \frac{1}{4}$, somit Zins $(x + 1200) \left(\frac{y + 0,25}{100} \right)$
 III. Kapital des C $(x + 3200)$ $\mathcal{M}$., Zinsfuß $y + 1$, somit Zins $(x + 3200) \left(\frac{y + 1}{100} \right)$

Der Angabe entsprechend ist

$$\begin{array}{ll} \text{I.} & \frac{xy}{100} + 68,5 = \frac{(x+1200)(y+0,25)}{100} \\ \text{II.} & \frac{xy}{100} + 230 = \frac{(x+3200)(y+1)}{100} \\ \text{III} = 100 \times \text{I} & xy + 6850 = xy + 1200y + 0,25x + 300 \\ \text{IV} = 100 \times \text{II} & xy + 23000 = xy + 3200y + x + 3200 \\ \text{III} & 6550 = 1200y + 0,25x \\ \text{IV} & 19800 = 3200y + x \\ \text{V} = 4 \times \text{III} & 26200 = 4800y + x \\ \text{IV} & 19800 = 3200y + x \\ \text{IV} = \text{V} - \text{IV} & 6400 = 1600y \\ & y = 4\% \\ & x = 7000 \mathcal{M}. \end{array}$$

2. Lösung.

B hat deshalb um 68,5 $\mathcal{M}$. mehr Zinsen erhalten, weil a) sein dem x $\mathcal{M}$. gleicher Teil $\frac{1}{4}\%$ höher und 1200 $\mathcal{M}$. zu $(y + 0,25)\%$ angelegt waren. Desgleichen hat C 230 $\mathcal{M}$. mehr Zinsen erhalten, weil der dem x $\mathcal{M}$. gleiche Teil des Kapitals um 1% höher und 3200 $\mathcal{M}$. zu $(y + 1)\%$ ausgeliehen waren.

Hieraus folgt, daß

$$\begin{array}{rcl}
 \text{I.} & \frac{0,25}{100} x + 1200 \left(\frac{y + 0,25}{100} \right) & = 68,5 \\
 \text{II.} & x \times \frac{1}{100} + 3200 \left(\frac{y + 1}{100} \right) & = 230 \\
 \hline
 \text{III} = 4 \times \text{I} & \frac{x}{100} + 48 y + 12 & = 274 \\
 \text{II} & \frac{x}{100} + 32 y + 32 & = 230 \\
 \text{III} & \frac{x}{100} + 48 y & = 262 \\
 \text{IV.} & \frac{x}{100} + 32 y & = 198 \\
 \hline
 \text{V} = \text{III} - \text{IV} & 16 y & = 64 \\
 & y & = 4\% \\
 & x & = 7000 \text{ M.}
 \end{array}$$

Antwort: A hat 7000 M. zu 4%, B 8200 M. zu 4½% und C 10 200 M. zu 5% ausstehen.

1. Pfalz. 1883.

Zwei Kapitalien, von denen das erste 4000 M. größer ist, stehen zu verschiedenen Prozents aus, das zweite ½% höher als das erste und bringen gleichviel Zinsen. Stände das erste Kapital zu den Prozents des zweiten und das zweite zu den Prozents des ersten aus, so würde das erste 380 M. mehr bringen, als das zweite. Wie groß waren die beiden Kapitalien, und zu welchen Prozents waren sie ausgeliehen?

Lösung.

Wenn x M. das kleinere Kapital bezeichnet, so ist das größere (x + 4000) M. Die Prozents seien y und (y + 0,5) M. Nun ist

$$\begin{array}{rcl}
 \text{I.} & (x + 4000) \frac{y}{100} & = x \left(\frac{y + 0,5}{100} \right) \\
 \text{II.} & (x + 4000) \left(\frac{y + 0,5}{100} \right) & = x \frac{y}{100} + 380 \\
 \hline
 \text{III} = 100 \times \text{I} & xy - 4000 y & = xy + 0,5 x \\
 & 0,5 x & = 4000 y \\
 \text{IV} = 100 \times \text{II} & xy + 4000 y + 0,5 x + 2000 & = xy + 38000 \\
 \text{V (Substit.)} & 4000 y + 4000 y & = 38000 - 2000 \\
 & 8000 y & = 36000 \\
 & y & = 4,5\% \\
 & x & = 4000 \times \frac{4,5}{0,5} = 36000 \text{ M.}
 \end{array}$$

Antwort: Es waren 40000 M. zu 4,5% und 36000 M. zu 5% ausgeliehen.

1. Mittelfranken. 1888.

Ein Vater gibt das Alter seiner Kinder in folgender Weise an: Dividiert man die Zahl 48 durch das Alter des jüngsten Kindes, die Zahl 24 durch das des nächst älteren Kindes, so ist 32 die Summe der Quotienten. Dividiert man ferner 24 durch das Alter des jüngsten Kindes, 12 durch das Alter des nächst älteren und 48 durch das Alter des ältesten Kindes, so ist 28 die Summe der Quotienten. Dividiert man endlich 12 durch das Alter des jüngsten Kindes, 48 durch das des nächst älteren und 24 durch das Alter des ältesten Kindes, so beträgt die Summe der Quotienten ebenfalls 28. Wie alt ist jedes Kind?

Lösung.

Wenn x Jahre das Alter des jüngsten Kindes, y Jahre das des nächstälteren Kindes und z Jahre das Alter des ältesten Kindes bezeichnet, so ist

I.	$\frac{48}{x} + \frac{24}{y} = 32$
II.	$\frac{24}{x} + \frac{12}{y} + \frac{48}{z} = 28$
III.	$\frac{12}{x} + \frac{48}{y} + \frac{24}{z} = 28$
I.	$\frac{48}{x} + \frac{24}{y} = 32$
IV = 2 × II	$\frac{48}{x} + \frac{24}{y} + \frac{96}{z} = 56$
V = IV — I	$\frac{96}{z} = 24$
	$z = 4 \text{ Jahre}$
VI (z in II subst.)	$\frac{24}{x} + \frac{12}{y} = 16$
VII (z in III subst.)	$\frac{12}{x} + \frac{48}{y} = 22$
VI.	$\frac{24}{x} + \frac{12}{y} = 16$
VIII = 2 × VII	$\frac{24}{x} + \frac{96}{y} = 44$
IX = VIII — VI	$\frac{84}{y} = 28$
	$y = 3 \text{ Jahre.}$
X (y in I subst.)	$\frac{48}{x} = 24$
	$x = 2 \text{ Jahre.}$

Antwort: Das Alter der Kinder war 2, 3 und 4 Jahre.

2. Oberbayern. 1891.

A und B kaufen jeder für 36 000 *M.* Staatspapiere, A 3,5prozentige, B 4prozentige. Der Kurs dieser Papiere stand so, daß B 25 *M.* an jährlichen Zinsen mehr bekam als A. Als beide Papiere im Kurse um 12% des Nominalwertes gestiegen waren, verkauften sie dieselben wieder, und A erhielt 600 *M.* mehr als B. Welches war der Kurs der Papiere beim Einkauf?

Lösung.

I. Wenn der Kurs d. h. der Kaufpreis für 1 Stück mit der Aufschrift 100 bei den 3,5prozentigen x , bei den 4prozentigen y war, so erhielt A $\frac{36000}{x}$ Stücke, von denen ein jedes jährlich 3,5 *M.* Rente

gab. B erhielt $\frac{36000}{y}$ Stücke mit je 4 *M.* jährlicher Rente.

Gemäß der Angabe ist $\frac{36000}{y} \times 4 - \frac{36000}{x} \times \frac{7}{2} = 25$.

II. Als der Kurs um 12% gestiegen war, d. h. als mit jedem Stücke beim Verkaufe 12 *M.* gewonnen wurden, so war $\frac{36000}{x} \times 12 - \frac{36000}{y} \times 12 = 600$. Man hat somit

$$\text{I.} \quad - \frac{36000}{x} \times \frac{7}{2} + \frac{36000}{y} \times 4 = 25$$

$$\text{II.} \quad \frac{36000}{x} \times 12 - \frac{36000}{y} \times 12 = 600$$

$$\text{III} = \text{I} \times 3 \quad - \frac{36000}{x} \times \frac{21}{2} + \frac{36000}{y} \times 12 = 75$$

$$\text{II.} \quad \frac{36000}{x} \times \frac{24}{2} - \frac{36000}{y} \times 12 = 600$$

$$\text{IV} = \text{II} + \text{III} \quad \frac{36000}{x} \times \frac{3}{2} = 675$$

$$36000 \times 3 = 1350 x$$

$$x = \frac{400 \times 3}{15} = 80 \text{ } M.$$

$$y = 90 \text{ } M.$$

Antwort: Der Kurs beim Einkauf war 80 *M.* für die $3\frac{1}{2}$ prozentigen, 90 *M.* für die 4 prozentigen Papiere.

1. Pfalz. 1890. und 3. Oberbayern. 1893.

Ein Wirt hat zwei Sorten Wein. Mischt er 9 hl der ersten Sorte mit 5 hl der zweiten, so erhält er einen Wein, von welchem das Liter

67 S zu stehen kommt. Wie teuer ist 1 hl jeder Sorte, wenn sich der Preis von 1 hl der ersten Sorte zu dem Preise von 1 hl der zweiten Sorte wie 36 : 29 verhält?

1. Lösung.

Da die Preise sich wie 36 : 29 verhalten und der Preis der Mischung 67 S sein soll, so können die Preise der Sorten keine anderen sein, als $36 \times 2 = 72 \text{ S}$ und $29 \times 2 = 58 \text{ S}$ für das Liter.

2. Lösung.

Ist der Preis für je 1 Liter der ersten Sorte $x \text{ S}$, so kosten 9 hl $9x \text{ M.}$, und 5 hl der zweiten Sorte $5 \times \frac{29}{36} x \text{ M.}$, so daß

$$\begin{aligned} 9x + \frac{145}{36}x &= 14 \times 67 \\ 324x + 145x &= 14 \times 67 \times 36 \\ 569x &= 14 \times 67 \times 36 \\ x &= \frac{7 \times 67 \times 2 \times 36}{569} = 72 \text{ M.} \end{aligned}$$

Antwort: 1 hl der ersten Sorte kostet 72 M. , der zweiten Sorte $29 \times 2 = 58 \text{ M.}$

2. Oberbayern. 1884.

Zwei Sorten Reis, von denen das kg bisher zu 80 S , beziehungsweise 64 S verkauft worden ist, werden gemischt und nun per kg zu 75 S verkauft. An 1720 kg werden auf diese Weise 86 M. gewonnen. Wie viel kg wurden von jeder Sorte genommen?

1. Lösung.

Die teurere Sorte sei $x \text{ kg}$, dann ist die billigere $1720 - x$. Die frühere Verkaufssumme nebst Gewinn ist gleich der Einnahme aus der Mischung. Demnach ist

$$\begin{aligned} 0,80x + (1720 - x) \times 0,64 + 86 &= 1720 \times 0,75 \\ 0,80x - 0,64x &= 1720(0,75 - 0,64) - 86 \\ x &= 645 \text{ kg der besseren Sorte.} \\ &1075 \text{ kg der billigeren Sorte.} \end{aligned}$$

2. Lösung.

Bei jedem Kilogramm der besseren Sorte werden 5 S verloren, dagegen bei jedem Kilogramm der schlechteren Sorte 11 S gewonnen. Der schließliche Gewinn ist gleich dem Unterschiede von Gewinn und Verlust der Sorten. Daher

$$\begin{aligned} (1720 - x) \times 11 - 5x &= 8600 \text{ S} \\ x &= 645 \text{ kg (wie oben).} \end{aligned}$$

3. Lösung.

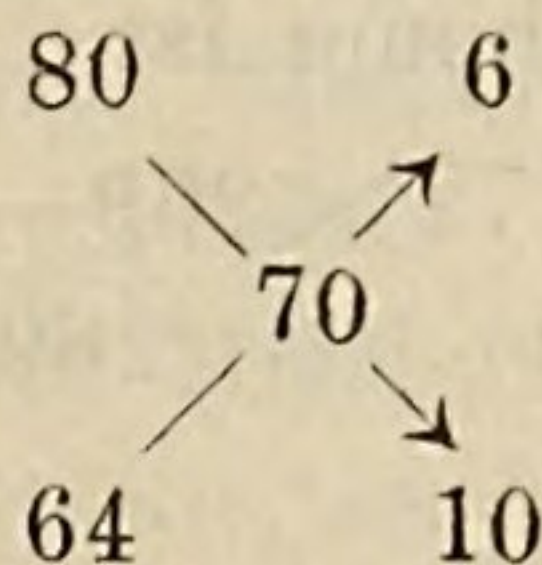
Jedes Kilogramm der minderen Sorte brachte 11 ₤ Gewinn. Wären sämtliche 1720 kg früher um 64 ₤ verkauft worden, so wäre der schließliche Gewinn $1720 \times 11 = 18920$ ₤ gewesen. Er betrug aber nur 86 M., somit um $18920 - 8600 = 10320$ ₤ weniger, weil auch Reis der besseren Sorte beigemischt war. Durch jedes kg dieser besseren Sorte wurde der Gewinn um $11 + 5 = 16$ ₤ gemindert. $10320 : 16 = 645$ kg der besseren Sorte.

4. Lösung.

Ähnlich wie in der 3. Lösung aus dem Entgange des Gewinnes die Menge der besseren Sorte berechnet ist, läßt sich aus der Minderung des Verlustes, der sich ergeben hätte, wenn nur die bessere Sorte verkauft worden wäre, die Menge der beigemischten minderen Sorte finden.

5. Lösung.

Für 1720 kg Mischung werden $1720 \times 0,75 = 1290$ M. bezahlt. Nach Abzug von 86 M. Mehrgevinnt verbleiben 1204 M. frühere Einnahme. Somit kosteten 1720 kg früher 1204 M. und 1 kg durchschnittlich $1204 : 1720 = 0,70$ M. Nach bekanntem Verfahren ist



$$16 : 6 = 1720 : x$$

$$x = 1720 \times \frac{6}{16} = 645 \text{ kg der besseren Sorte.}$$

Antwort: Die Mischung bestand aus 645 kg der Sorte zu 80 ₤ und 1075 kg der Sorte zu 64 ₤.

3. Schwaben. 1891.

Man nimmt zu einer Mischung 120 Pfund à 50 ₤, 69 Pfund à 60 ₤, 80 Pfund à 90 ₤ und eine gewisse Anzahl von Pfunden einer vierten Sorte, von welcher das Pfund 84 ₤ kostet. Wie viele Pfunde müssen von dieser vierten Sorte genommen werden, damit 1 Pfund der Mischung auf 72 ₤ zu stehen kommt?

1. Lösung.

I. Da jedes Pfund der Mischung um 72 ₤ verkauft wird, so werden

a) an jedem Pfund à 50 ₤ 22 ₤, im Ganzen 26,40 M. gewonnen

b) " " " à 60 " 12 " " " 8,28 " "

Summa 34,68 M. gewonnen

c) " " " à 90 " 18 " im Ganzen 14,40 " verloren

20,28 M. gewonnen.

- II. Da ein Gewinn nicht beabsichtigt ist, so müssen so viele Pfunde à 84 ₤ zugesetzt werden, daß ein Verlust von 20,28 *M.* entsteht. Der Verlust bei jedem Pfunde ist 0,12 *M.*, somit sind $\frac{20,28}{0,12} = 169$ Pfunde zu nehmen.

2. Lösung.

- I. Die Ausgaben und Einnahmen sind einander gleich. Werden x Pfunde à 84 ₤ genommen, so sind die Ausgaben $120 \times 0,5 + 69 \times 0,6 + 80 \times 0,9 + x \times 0,84 = (173,40 + 0,84x)$ *M.*
 II. Die Einnahmen sind $(120 + 69 + 80 + x) \times 0,72 = (269 + x) 0,72 = (269 \times 0,72 + 0,72x)$ *M.* Nun ist
 $173,40 + 0,84x = 269 \times 0,72 + 0,72x$
 $0,12x = 269 \times 0,72 - 173,40$
 $x = 169 \times 6 - 1445 = 1614 - 1445 = 169$ Pfunde.

3. Lösung.

Werden zuerst 120 Pfunde à 50 ₤, 69 Pfunde à 60 ₤ und 80 Pfunde à 90 ₤ gemischt, so kostet 1 Pfd. der Mischung $\frac{17340}{269}$ ₤. Nach dem bekannten Schema ist

$$\begin{array}{ccc} 84 & \nearrow & \frac{72 \times 269 - 17340}{269} = \frac{2028}{269} \\ & 72 & \\ \frac{17340}{269} & \searrow & 12 = 12 \end{array}$$

$$12 : \frac{2028}{269} = 269 : x$$

$$x = \frac{2028}{12} = 169 \text{ Pfunde.}$$

Antwort: Von der Sorte à 84 ₤ müssen 169 Pfunde genommen werden.

2. Oberbayern. 1895.

A mischt drei Sorten Wein per Liter zu 96 ₤, 87 ₤ und 65 ₤ und verkauft das Liter um 85 ₤. Dadurch gewinnt er an 41,21 hl 71,05 *M.**) Wie viel von jeder Sorte nimmt er zur Mischung, wenn er von der zweiten Sorte $66\frac{2}{3}\%$ mehr nimmt als von der ersten?

1. Lösung.

- I. Wenn man die Menge der ersten Sorte mit x Liter bezeichnet, so beträgt die Menge der zweiten Sorte $1\frac{2}{3}x$ und diejenige der dritten Sorte $(4121 - 2\frac{2}{3}x)$ Liter.

*) In der ursprünglichen Angabe stand wahrscheinlich 14,21 hl.

- II. Die erste Sorte kostet $96 \times \text{fl}$, die zweite $87 \times \frac{5}{3} \times \text{fl}$, die dritte $(4121 - \frac{8}{3}x) \times 65 \text{ fl}$ und die Mischung (beim Verkaufe) $4121 \times 85 \text{ fl}$.
 III. Die Ausgaben und der Gewinn sind so groß wie die Einnahmen; daher ist

$$96x + \frac{435}{3}x + 4121 \times 65 - \frac{520x}{3} + 7105 = 4121 \times 85$$

$$\frac{288x + 435x - 520x}{3} = 4121 \times (85 - 65) - 7105$$

$$\frac{203x}{3} = 82420 - 7105$$

$$203x = 3 \times 75315$$

$$x = \frac{225945}{203} = 1113\frac{6}{203} \text{ l à } 96 \text{ fl}$$

$$1855\frac{10}{203} \text{ l à } 87 \text{ fl}$$

$$1152\frac{187}{203} \text{ l à } 65 \text{ fl}$$

2. Lösung.

- I. Werden von der ersten Sorte 3 Liter genommen, so werden von der zweiten 5 Liter zugesetzt. Der Preis für je 1 Liter dieser Mischung ist $\frac{96 \times 3 + 87 \times 5}{8} = 90\frac{3}{8} \text{ fl}$.
 II. Bei jedem Liter der dritten Sorte werden $85 - 65 = 20 \text{ fl}$ gewonnen, bei jedem Liter der Mischung von der ersten und zweiten Sorte $90\frac{3}{8} - 85 = 5\frac{3}{8} \text{ fl}$ verloren. Wenn man statt 1 Liters der geringsten Sorte 1 Liter der Mischung der besseren Sorten nimmt, so verringert sich der Gewinn um je $25\frac{3}{8} \text{ fl}$.
 III. Würde nur Wein der geringsten Sorte um 65 fl verkauft, so wäre der Gewinn $4121 \times 20 = 82420 \text{ fl}$. Es ist aber um $82420 - 7105 = 75315 \text{ fl}$ geringer.
 IV. Um diese Verringerung zu bewirken, wurden $75315 : 25\frac{3}{8} = \frac{75315 \times 8}{203}$ Liter Mischung der besseren Sorten zugesetzt.
 V. Von dieser Mischung kommen auf die beste Sorte $\frac{75315 \times 8}{203} \times \frac{3}{8} = 1113\frac{6}{203}$ Liter, auf die zweite Sorte $1855\frac{10}{203}$ Liter.
 Antwort: Zur Mischung wurden $1113\frac{6}{203}$ Liter à 96 fl , $1855\frac{10}{203}$ Liter à 87 fl und $1152\frac{187}{203}$ Liter à 65 fl genommen.

2. Pfalz. 1885.

Ein Wirt hat aus zwei Sorten Wein (A und B) 420 Liter so gemischt, daß sie im Verhältnis von $2 : 2\frac{2}{3}$ enthalten sind. Zu diesen 420 Litern setzt er dann 108 Liter einer anderen aus denselben Sorten bestehenden Mischung und erhielt so einen Wein, in welchem sich der Menge nach die angeführten Sorten wie $5 : 6$ verhielten. Wie viel jeder Sorte war in der (zuletzt) zugesetzten Mischung enthalten?

1. Lösung.

- I. In der ersten Mischung waren von der 1. Sorte $420 \times 2 \times \frac{3}{14} = 180$ Liter
 „ „ 2. „ $420 - 180 = 240$ „
 II. Bei der zweiten Mischung wurden zugesetzt: von der 1. Sorte x Liter
 „ „ 2. „ $108 - x$ l.
 Nun ist $(180 + x) : (240 + 108 - x) = 5 : 6$
 $(180 + x) : (348 - x) = 5 : 6$
 $x = 60$ Liter
 $108 - 60 = 48$ Liter.

2. Lösung.

Nach der ersten Mischung bestand der Wein aus 180 Liter der ersten Sorte und 240 Liter der zweiten. Als weitere 108 Liter dazu kamen, war die Menge des Weines 528 Liter, und zwar $\frac{528 \times 5}{11} = 240$ Liter der ersten und 288 Liter der zweiten Sorte. Somit kamen bei der zweiten Mischung hinzu

$$240 - 180 = 60 \text{ Liter der ersten Sorte}$$

$$288 - 240 = 48 \text{ Liter der zweiten Sorte.}$$

Antwort: Bei der zweiten Mischung wurden zugesetzt 60 Liter der ersten Sorte und 48 Liter der zweiten.

1. Mittelfranken. 1885.

Zwei Silberbarren wiegen 80 kg und geben, wenn sie zusammengeschmolzen werden, Silber vom Feingehalte 0,8325. Wie viel wiegt jedes dieser zwei Silberstücke, wenn der Feingehalt des ersten 0,9 und des zweiten 0,75 ist?

1. Lösung.

Die einfachste Lösung ist diejenige, bei welcher x und y die Gewichte der beiden Stücke bezeichnet, und die zweite Gleichung mit der Summe der Gewichte des unedlen Metalles ($0,1675 \times 80$ kg) gebildet wird.

$$\begin{array}{ll} \text{I.} & x + y = 80 \\ \text{II.} & 0,1x + 0,25y = 0,1675 \times 80 \\ \hline \text{III} = 10 \times \text{II} & x + 2,5y = 1,675 \times 80 \\ \text{I.} & x + y = 80 \\ \hline \text{IV} = \text{III} - \text{I} & 1,5y = 0,675 \times 80 \\ & y = 0,45 \times 80 = 36 \text{ kg mit } 0,75 \text{ Feingehalt} \\ & x = 44 \text{ kg mit } 0,9 \text{ Feingehalt.} \end{array}$$

2. Lösung.

$$\begin{array}{l} \text{I.} \quad y + y = 80 \\ \text{II.} \quad 0,9x + 0,75y = 0,8325 \times 80 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} x = 44 \text{ kg} \\ y = 36 \text{ kg.} \end{array}$$

3. Lösung.

$$\begin{array}{rcl} 0,9000 & & 0,0825 \text{ mit } 0,9 \text{ Feinheit} \\ & \nearrow 0,8325 & \\ 0,7500 & & 0,0675 \text{ mit } 0,75 \text{ „} \\ & \searrow & \\ & 0,15 & \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \text{I.} \quad 0,15 : 0,0825 = 80 : x \\ \quad \quad x = 44 \text{ kg} \\ \quad \quad y = 36 \text{ kg.} \end{array}$$

4. Lösung.

Würden die 80 kg aus einer Legierung mit 0,100 unedlem Metalle bestehen, so wäre die Menge dieses unedlen Metalles 8 kg. Es ist aber $0,1675 \times 80 = 13,4$ kg schwer oder um 5,4 kg mehr. Jedes Kilogramm des zweiten Silberstückes verringert den Mehrgehalt um $0,25 - 0,1 = 0,15$; daher sind zur Verringerung von 5,4 kg vom zweiten Silberstücke $\frac{5,40}{0,15} = 36$ kg erforderlich. U. s. w.

Antwort: Es wurde ein **44 kg** schweres Silberstück von 0,900 Feinheit mit einem **36 kg** schweren von 0,750 Feinheit zusammengeschmolzen.

3. Oberbayern. 1894.

Von 100 g feinem Golde nahm ein Goldarbeiter eine gewisse Anzahl Gramm fort und setzte dafür ebensoviele Gramm Silber zu. Als er hierauf von der Mischung 30 g fortnahm und dafür wieder ebensoviel Silber zusetzte, war die Mischung 0,525 fein. Wie viele Gramm Gold waren zuerst fortgenommen worden?

1. Lösung.

Als zuletzt 30 g Legierung weggenommen und durch reines Silber ersetzt wurden, waren noch 70 g Legierung vorhanden, welche das Gold enthielt, das auch schließlich noch vorhanden war, nämlich 52,5 g. In den weggewogenen 30 g war eine verhältnismäßige Menge nämlich $\frac{52,5 \times 30}{70} = 22,5$ g. Die Menge reinen Goldes nämlich 75 g war

vorhanden, bevor 30 g Legierung fortgenommen oder nachdem die zu suchende Menge Gold entfernt war. Da ursprünglich 100 g, sodann aber nur mehr 75 g reines Gold vorhanden waren, so betrug die zuerst fortgenommene Menge **25 g.***)

2. Lösung.

- I. Bezeichnet x g die Menge des zuerst fortgenommenen Goldes, so blieben nach dem ersten Silberzusatz $(100 - x)$ g Gold zurück, welche in 100 g Legierung verteilt wurden, so daß jeder Gramm Legierung $\left(\frac{100-x}{100}\right)$ g Gold enthielt.
- II. Als hierauf 30 g der ersten Legierung weggewogen wurden, so wurden hiedurch $30 \times \left(\frac{100-x}{100}\right) = \frac{3}{10}(100-x)$ Gold fortgenommen.
- III. Im ganzen blieben $100 - x - \frac{3}{10}(100 - x) = (70 - \frac{7}{10}x)$ g Gold zurück. Diese Menge ist $100 \times 0,525$; daher

$$52,5 = 70 - \frac{7}{10}x$$

$$x = \left(\frac{70 - 52,5}{7}\right) 10 = 2,5 \times 10 = \mathbf{25 \text{ g.}}$$

Antwort: Es waren zuerst **25 g** feinen Goldes fortgenommen worden.

2. Unterfranken. 1890.

Eine aus 3 Teilen Silber und 4 Teilen Kupfer bestehende Legierung im Gewichte zu 38,5 kg soll so mit Kupfer versetzt werden, daß sich das Silber zum Kupfer wie 1 : 3,5 verhält. Wie viel Kupfer muß zur Mischung gesetzt werden?

1. Lösung.

- I. In 38,5 kg Legierung sind $38,5 \times \frac{3}{7} = 16,5$ kg Silber und 22 kg Kupfer enthalten.
- II. Es soll so viel Kupfer zugesetzt werden, daß mit 16,5 kg Silber $16,5 \times 3,5$ kg vereinigt sind.
- III. Daher müssen $16,5 \times 3,5 - 22 = 57,75 - 22 = \mathbf{35,75 \text{ kg}}$ Kupfer zugesetzt werden.

2. Lösung.

- I. In 38,5 kg Legierung sind 22 kg Kupfer und 16,5 kg Silber enthalten.

*) Die Rechnung kann in ähnlicher Weise gemacht werden, indem die Menge des Silbers bestimmt wird.

II. Es müssen, um das gewünschte Verhältniß von Silber zu Kupfer zu erhalten, x kg Kupfer zugesetzt werden; dann ist

$$(22 + x) : 16,5 = 3,5 : 1$$

$$22 + x = 57,75$$

$$x = 35,75 \text{ kg Kupfer.}$$

Antwort: Es müssen **35,75 kg** Kupfer zugesetzt werden.

2. Oberbayern. 1892.

Ein Juwelier hat zwei Sorten Silber. Schmilzt er 10 kg der ersten mit 5 kg der zweiten Sorte, so ist die Mischung 0,686 fein. Setzt er aber $7\frac{1}{2}$ der ersten Sorte zu $1\frac{1}{2}$ kg der zweiten, so hat die Mischung einen Gehalt von 0,624 fein. Von welchem Gehalte ist jede der beiden Silbersorten?

Lösung.

Nimmt man als Feinheit der ersten Sorte x , der zweiten Sorte y , so ist

$$\text{I.} \quad 10x + 5y = 15 \times 0,686$$

$$\text{II.} \quad 7,5x + 1,5y = 9 \times 0,624$$

$$\text{III} = 3 \times \text{I} \quad 30x + 15y = 45 \times 0,686$$

$$\text{IV} = 10 \times \text{II} \quad 75x + 15y = 90 \times 0,624$$

$$\text{V} = \text{IV} - \text{III} \quad 45x = 2 \times 45 \times 0,624 - 45 \times 0,686$$

$$x = 1,248 - 0,686$$

$$x = 0,562$$

$$y = 0,934.$$

Antwort: Die erste Sorte ist **0,562 fein**; die zweite Sorte **0,934**.

5. Oberpfalz. 1887.

Eine Legierung aus Kupfer und Zinn wog 80,8 kg. Im Wasser verlor sie 10 kg. Wie viel war von jedem Metalle vorhanden, a) dem Volumen nach? b) dem Gewichte nach? (Spezif. Gew. des Kupfers 8,8 und des Zinnes 7.)

Lösungen.

Sogenannte Mischungsrechnungen, bei denen Angaben über das absolute Gewicht und Volumen (Dichtigkeit) gemacht sind, können auf vielerlei Art gelöst werden. Bei jeder Aufgabe alle diese Lösungen durchzuführen, würde allzu weitläufig werden; es genügt, wenn dieselben an einem einzigen Beispiel erörtert werden.

Dichtigkeit (auch spezifisches Gewicht genannt) ist eine absolute Zahl, welche angibt, wie vielmals irgend ein Volumen eines Körpers mit bestimmter Temperatur mehr wiegt als das gleiche Volumen Wasser

mit der nämlichen oder einer anderen Temperatur; mit anderen Worten: Unter Dichtigkeit versteht man das Verhältniß des Gewichtes eines Körpers mit bestimmter Temperatur zum Gewichte des gleichen Volumens Wasser mit der nämlichen oder einer anderen Temperatur. Hieraus folgt, daß das spezifische Gewicht auch angibt, wie viele Gramm 1 ccm, oder wie viele Kilogramm 1 Liter eines Körpers mit bestimmter Temperatur wiegt. Gewöhnlich wird die Dichtigkeit bestimmt, indem man untersucht, wie viel ein Körper an Gewicht verliert, wenn er in Wasser getaucht gewogen wird. Dieser Verlust ist so groß, wie das Gewicht des verdrängten (gleichen Volumens) Wassers. Wenn nun z. B. angegeben ist, daß 80,8 kg einer Legierung im Wasser 10 kg verlieren, so ist damit ausgedrückt: a) daß 80,8 kg 10 Liter Raum einnehmen; b) daß die Dichtigkeit 8,08 mal größer ist, als die Dichtigkeit des Wassers; c) daß 1 kg Legierung den Raum von $\frac{1}{8,08}$ Litern einnimmt; d) daß 1 ccm Legierung 8,08 g wiegt.

Die einfachste Lösung der Aufgaben, in denen die Menge der Bestandteile einer Legierung bestimmt werden soll, ist in den meisten Fällen diejenige mit zwei Unbekannten, welche die Volumina der Bestandteile bezeichnen.

1. Lösung.

Bezeichnet x das Volumen des Zinnes, y das Volumen des Kupfers, somit $7x$ das Gewicht des Zinnes und $8,8y$ das Gewicht des Kupfers, so ist

$$\begin{array}{rcl}
 \text{I.} & x + y & = 10 \\
 \text{II.} & 7x + 8,8y & = 80,8 \\
 \text{III} = 8,8 \times \text{I} & 8,8x + 8,8y & = 88 \\
 \text{II.} & 7x + 8,8y & = 80,8 \\
 \text{IV} = \text{III} - \text{II} & 1,8x & = 7,2 \\
 & x & = 4 \text{ cdm Zinn} \\
 & y & = 6 \text{ cdm Kupfer.}
 \end{array}$$

2. Lösung.

Wäre statt der Legierung nur Zinn vorhanden, so wäre das Gewicht 70 kg. Es ist aber 10,8 kg höher. Durch Zugabe von je 1 cdm Kupfer statt 1 cdm Zinnes wird das Gewicht der Legierung um $8,8 - 7 = 1,8$ kg erhöht. Zur Erhöhung um 10,8 kg sind $10,8 : 1,8 = 6$ cdm Kupfer nötig.

3. Lösung.

Wäre statt der Legierung nur Kupfer vorhanden, so wäre das Gewicht 88 kg etc.

4. Lösung.

1 cdm Zinn wiegt 7 kg, 1 cdm Kupfer 8,8 kg, 1 cdm Legierung 8,08

$$\begin{array}{rcl} 7 & & 0,72 \\ & \searrow \nearrow & \\ & 8,08 & \\ & \nearrow \searrow & \\ 8,8 & & 1,08 \\ & & \hline & & 1,8 \end{array}$$

$$1,8 : 0,72 = 10 : x$$

$$x = 4 \text{ cdm Zinn.}$$

5. Lösung.

Wird das Gewicht des Zinnes mit z , des Kupfers mit u bezeichnet, dann ist das Volumen $\frac{z}{7}$ cdm, beziehungsweise $\frac{u}{8,8}$, somit

$$\text{I.} \quad u + z = 80,8$$

$$\text{II.} \quad \frac{u}{8,8} + \frac{z}{7} = 10$$

$$\text{III} = \text{I} : 8,8$$

$$\frac{u}{8,8} + \frac{z}{8,8} = \frac{80,8}{8,8}$$

II.

$$\frac{u}{8,8} + \frac{z}{7} = 10$$

$$\text{IV} = \text{II} - \text{III}$$

$$\frac{z}{7} - \frac{z}{8,8} = \frac{88 - 80,8}{8,8}$$

$$\text{V} = 7 \times 8,8 \times \text{IV} \quad 8,8z - 7z = 7 \times 7,2$$

$$1,8z = 7 \times 7,2$$

$$z = 28 \text{ kg Zinn.}$$

6. Lösung.

Wäre statt der Legierung nur Zinn vorhanden, so wäre das Volumen $\frac{80,8}{7}$ l; dasselbe ist aber um $\frac{80,8}{7} - 10 = \frac{10,8}{7}$ l kleiner. Durch

Zugabe von je 1 kg Kupfer wird das Volumen um $\frac{1}{7} - \frac{1}{8,8} = \frac{1,8}{7 \times 8,8}$ l

verringert. Zur Verringerung um $\frac{10,8}{7}$ l sind $\frac{10,8}{7} : \frac{1,8}{7 \times 8,8} = 52,8$ kg Kupfer nötig.

7. Lösung.

Wäre statt der Legierung nur Kupfer vorhanden, so wäre das Volumen $\frac{80,8}{7}$ l etc.

8. Lösung.

80,8 kg Zinn haben das Volumen von $\frac{80,8}{7}$ l. Das Volumen des gleichen Gewichtes Kupfer ist $\frac{80,8}{8,8}$ und der Legierung 10.

$$\begin{array}{rcl} \frac{80,8}{7} & \nearrow & \frac{7,2}{8,8} \\ & 10 & \\ \frac{80,8}{8,8} & \searrow & \frac{10,8}{7} \end{array}$$

Die Mischungsverhältnisse sind somit $\frac{7,2}{8,8} : \frac{10,8}{7} = 72 \times 71 : 88 \times 108 = 35 : 66$, d. h. in 101 kg Legierung sind 35 kg Zinn und 66 kg Kupfer. Demnach sind in 80,8 kg Legierung $80,8 \times \frac{35}{101} = 28$ kg Zinn und 52,8 kg Kupfer.

Antwort: Die Legierung enthält 4 l = 28 kg Zinn und 6 l = 52,8 kg Kupfer.

2. Schwaben. 1894.

Messing besteht aus Kupfer und Zink. Wie viel Kupfer und wie viel Zink muß eine Messingkomposition von 124 Pfd. haben, wenn 89 Pfd. Kupfer im Wasser 10 Pfd., 7 Pfd. Zink im Wasser 1 Pfd. und die erwähnten 124 Pfd. Messing im Wasser 15 Pfd. von ihrem Gewichte verlieren?

1. Lösung.

Wenn x die Anzahl der Kubikeinheiten Kupfer, y diejenige des Zinkes in 124 Pfd. Legierung bezeichnet, so ist

$$\text{I.} \quad x + y = 15$$

$$\text{II.} \quad 8,9x + 7y = 124$$

$$\text{III} = 7 \times \text{I} \quad 7x + 7y = 105$$

$$\text{II.} \quad 8,9x + 7y = 124$$

$$\text{IV} = \text{II} - \text{III} \quad 1,9x = 19$$

x = 10 Kubikeinheiten Kupfer à 8,9 Pfd., somit **89 Pfd. Kupfer**
 y = 5 " " Zink à 7 " " **35 Pfd. Zink.**

2. Lösung.

1 Kubikeinheit Kupfer wiegt 8,9 Pfd., 1 Kubikeinheit Legierung $8\frac{4}{15}$ Pfd. und Zink 7 Pfd. Nach dem bekannten Schema ist

$$\begin{array}{rcl} 8\frac{9}{10} & \nearrow & \frac{19}{15} \quad 2 \\ & 8\frac{4}{15} & \text{oder} \\ 7 & \searrow & \frac{19}{30} \quad 1 \end{array}$$

Zur Ausgleichung der Gewichte sind 2 Kubikeinheiten Kupfer und 1 Kubikeinheit Zink zu nehmen. Da die Legierung aus 15 Kubikeinheiten besteht, so enthält sie 10 solcher Einheiten Kupfer und 5 Zink. Antwort: Die Legierung besteht aus **89 Pfd. Kupfer** und **35 Pfd. Zink**.

1. Oberbayern. 1887.

Jemand kaufte eine zinnerne Schüssel von 11 Pfd. Gewicht. Da er vermutete, daß dieselbe ungewöhnlich viel Blei enthalte, ermittelte er, wie viel sie von ihrem Gewichte unter Wasser verliere, und fand, daß dieser Gewichtsverlust $1\frac{1}{4}$ Pfd. betrage. Wenn nun 7,2 Pfd. Zinn im Wasser 1 Pfd. und 11,4 Pfd. Blei im Wasser ebenfalls 1 Pfd. verlieren, wie viel Blei und Zinn enthält die Schüssel?

1. Lösung.

Bezeichnet x das Volumen des Zinnes in $\frac{1}{2}$ Liter, y das Volumen des Bleies, so ist

$$\begin{array}{rcl} \text{I.} & x + y & = 1\frac{1}{4} \\ \text{II.} & 7,2x + 11,4y & = 11 \\ \text{III} = 7,2x \times \text{I} & 7,2x + 7,2y & = 9 \\ \text{II.} & 7,2x + 11,4y & = 11 \\ \text{IV} = \text{II} - \text{III} & 4,2y & = 2 \\ & y = \frac{2}{4,2} \text{ halbe Liter} & = \frac{5}{21} \text{ l Blei} \\ & x = \frac{6,5}{8,4} \text{ halbe Liter} & \text{Zinn.} \end{array}$$

Antwort: Die Schüssel enthielt $\frac{6,5}{8,4} \times 7,2 = \frac{3,9}{7} = 5\frac{4}{7}$ **Pfd. Zinn** und $5\frac{3}{7}$ **Pfd. Blei**.

2. Lösung.

Bezeichnet z die Anzahl Pfunde Zinn, w die Pfunde Blei in der Legierung, so sind die Volumina in halben Litern $\frac{z}{7,2}$ und $\frac{w}{11,4}$. Somit ist

$$\begin{array}{rcl} \text{I.} & z + w & = 11 \\ \text{II.} & \frac{z}{7,2} + \frac{w}{11,4} & = \frac{5}{4} \\ \text{III} = \text{I} : 7,2 & \frac{z}{7,2} + \frac{w}{7,2} & = \frac{11}{7,2} \\ \text{II.} & \frac{z}{7,2} + \frac{w}{11,4} & = \frac{5}{4} \\ \text{IV} = \text{III} - \text{II} & \frac{w}{7,2} - \frac{w}{11,4} & = \frac{11 - 9}{7,2} \\ & w = \frac{2}{7,2} \times \frac{7,2 \times 11,4}{4,2} & = \frac{11,4}{2,1} = 5\frac{3}{7} \text{ Pfd. Blei} \\ & z = 11 - 5\frac{3}{7} & = 5\frac{4}{7} \text{ Pfd. Zinn.} \end{array}$$

3. Quadratische Gleichungen.

2. Pfalz. 1884.

Jemand verkauft 10 Prämienlose, die er vor mehreren Jahren zu einem gewissen Kurse gekauft hatte, um 2250 *M.* und gewinnt dabei so viele Prozente, als der dritte Teil von dem Ankaufspreise eines Looses betrug. Welches war der Preis eines solchen beim Ankaufe?

Lösung.

Wird mit x *M.* der Kaufpreis für 1 Stück der Loose bezahlt, so war der Preis für 10 Loose $10x$ *M.* Da die Prozente $\frac{x}{3}$ *M.* betrugen, so ist der Ausdruck für den Gewinn $10x \times \frac{x}{3} : 100 = \frac{x^2}{30}$. Die Einnahme ist gebildet aus der Summe von Ausgabe und Gewinn; daher ist

$$\begin{aligned} 10x + \frac{x^2}{30} &= 2250 \\ x^2 + 300x &= 67500 \\ x^2 + 300x + (150)^2 &= 67500 + 22500 \\ (x + 150)^2 &= 90000 \\ x + 150 &= \pm 300 \\ x_1 &= 150 \text{ *M.*}\end{aligned}$$

Antwort: Ein Loos kostet 150 *M.*

2. Pfalz. 1891.

Ein Kaufmann hat zwei Kaffeesorten vorrätig; von der ersten Sorte kostet $\frac{1}{2}$ kg so viele Pfennige als davon kg vorhanden sind; von der zweiten Sorte sind 20 kg mehr vorhanden und $\frac{1}{2}$ kg kostet $\frac{1}{10}$ *M.* mehr. Der Wert der beiden Sorten ist 430,24 *M.* Wie viele kg sind von jeder Sorte vorrätig?

Lösung.

Wenn x Kilogramm von der ersten Sorte vorrätig sind, so kostet 1 kg $2x$ ₤ und sind von der zweiten Sorte $(x + 20)$ Kilogramm vorhanden, von denen jedes $2(x + 10)$ ₤ kostet. Nun ist

$$\begin{aligned} 2x \times x + (x + 20)(2x + 20) &= 43024 \\ 2x^2 + 2x^2 + 60x + 400 &= 43024 \\ 4x^2 + 60 &= 42624 \\ x^2 + 15x + \left(\frac{15}{2}\right)^2 &= 10656 - \frac{225}{4} \\ (x + \frac{15}{2})^2 &= \frac{42849}{4} \\ x &= -\frac{15}{2} \pm \frac{207}{2} \\ x_1 &= \frac{192}{2} = 96 \text{ kg.}\end{aligned}$$

Antwort: Von der ersten Sorte sind 96 kg, von der zweiten Sorte 116 kg vorrätig.

1. Unterfranken. 1891.

Man hat dreierlei Waren, welche zusammen 552,50 *M.* kosten. Das Pfund einer jeden Ware kostet so viel mal 10 *S.* als man davon Pfund hat. Die zweite Sorte wiegt um ein Drittel mehr als die erste und die dritte $3\frac{1}{2}$ mal so viel als die zweite. Wie viel Pfund hat man von jeder Sorte?

Lösung.

- I. Bezeichnet man die drei Sorten der Waren mit x , y und z Pfund, so ist $y = \frac{4}{3}x$ und $z = \frac{7}{2} \times \frac{4}{3}x = \frac{14}{3}x$.
- II. Von der ersten Ware kostet jedes Pfund $10x$ *S.*, also kosten x Pfunde $10x^2$ *S.* Bei der zweiten Ware betragen die Kosten $\frac{4}{3}x \times \frac{40}{3}x = \frac{160x^2}{9}$ *S.* Die Kosten der dritten Ware sind $\frac{14}{3}x \times \frac{140x}{3} = \frac{1960x^2}{9}$ *S.*

Der Angabe entsprechend sind

$$\begin{aligned} 10x^2 + \frac{160x^2}{9} + \frac{1960x^2}{9} &= 55250 \\ 90x^2 + 160x^2 + 1960x^2 &= 55250 \times 9 \\ x^2 &= \frac{55250 \times 9}{2210} \\ x^2 &= 25 \times 9 \\ x &= 15 \end{aligned}$$

Antwort: Die erste Ware wiegt 15 Pfde., die zweite 20 Pfde., die dritte 70 Pfde.

3. Pfalz. 1892.

Ein Weinhändler kauft für 1152 *M.* Rotwein und für eine gleiche Summe Weißwein, wobei er von letzterem 8 hl mehr erhält als von dem ersteren. Er verkauft dann $3\frac{3}{4}$ hl Rotwein und 5 hl Weißwein und löst hiebei bei 25% Gewinn im ganzen 450 *M.* Wie viel Hektoliter hatte er von jeder Sorte eingekauft?

Lösung.

- I. Wenn x hl die Menge des Rotweines bezeichnet, so kostet 1 hl $\frac{1152}{x}$ *M.* beim Einkaufe und $\frac{1152}{x} \times \frac{5}{4} = \frac{1440}{x}$ *M.* beim Verkauf.
- Mithin kosten $3\frac{3}{4}$ hl Rotwein beim Verkauf $\frac{1440}{x} \times \frac{15}{4} = \frac{5400}{x}$ *M.*

II. Da $(x + 8)$ hl Weißwein erhalten wurden, so kostete 1 hl beim Einkauf $\frac{1152}{(x + 8)}$ $\mathcal{M}$. und $\frac{1440}{x + 8}$ $\mathcal{M}$ beim Verkauf. Somit kosteten 5 hl beim Verkauf $\frac{7200}{x + 8}$. Die Einnahme beim Verkauf war 450, daher

$$450 = \frac{5400}{x} + \frac{7200}{(x + 8)}$$

$$1 = \frac{12}{x} + \frac{16}{x + 8}$$

$$x^2 + 8x = 12x + 96 + 16x$$

$$x^2 - 20x = 96$$

$$x^2 - 20x + 100 = 196$$

$$x - 10 = \pm 14$$

$$x_1 = 24 \text{ hl Rotwein}$$

$$32 \text{ hl Weißwein.}$$

Antwort: Der Händler hatte **24 hl Rotwein** und **32 hl Weißwein** gekauft.

1. Pfalz. 1884.

Ein 270 Liter haltendes Faß ist mit starkem Wein gefüllt. Von diesem wird ein gewisses Quantum in Flaschen abgezogen und im teilweise geleerten Fasse durch Wasser ersetzt. Wenn dem nun wieder vollen Fasse 63 Liter mehr als bei dem ersten Male entnommen und abermals durch Wasser ersetzt werden, so ist gerade so viel Wasser als Wein im Fasse. Wie viel Liter Wein wurden beim ersten Male abgezapft?

Lösung.

Nachdem x Liter Wein entnommen waren, enthielt das Faß noch $(270 - x)$ reinen Weines. Als hierauf mit Wasser zu 270 Liter Mischung aufgefüllt war, traf für jedes Liter Mischung $\left(\frac{270-x}{270}\right)$ Wein. Beim zweiten Male wurden $\left(\frac{270-x}{270}\right) (x + 63)$ Liter reinen Weines entnommen; somit wurden im ganzen $x + \left(\frac{270-x}{270}\right) (x + 63)$ Liter reinen Weines oder 135 Liter abgezapft.

Es ist daher

$$135 = x + \frac{(270-x)(x+63)}{270}$$

$$270 \times 135 = 270x + 270x - x^2 + 270 \times 63 - 63x$$

$$x^2 - 477x = -270 \times 72$$

$$x^2 - 477x + \left(\frac{477}{2}\right)^2 = \frac{477 \times 477 - 270 \times 288}{4}$$

$$\left(x - \frac{477}{2}\right)^2 = \frac{9 \times 9 \times 53 \times 53 - 9 \times 9 \times 30 \times 32}{4}$$

$$x = \frac{477}{2} \pm \frac{9}{2} \sqrt{2809 - 960}$$

$$x = \frac{477}{2} \pm \frac{9}{2} \sqrt{1849}$$

$$x = \frac{477}{2} \pm \frac{9}{2} \times 43$$

$$x = \frac{9}{2} (53 \pm 43)$$

Da das Faß nur 270 Liter enthalten konnte, so muß 43 negativ genommen werden. Demnach ist

$$x_2 = \frac{9 \times 10}{2} = 45 \text{ Liter.}$$

Antwort: Es wurden beim ersten Male 45 Liter abgezapft.

1. Niederbayern. 1889.

Unter 20 Kinder, Knaben und Mädchen, werden 144 Nüsse so verteilt, daß die Knaben die Hälfte der ganzen Anzahl bekommen, jeder einzelne aber 3 mehr als ein Mädchen.*) Wie viele Knaben und Mädchen waren es?

1. Lösung.

A. Wenn jedes Mädchen x Nüsse erhält, so ist die Zahl der Mädchen $\frac{72}{x}$. Jeder Knabe erhält alsdann $(x+3)$ Nüsse und die Anzahl

*) Diese Aufgabe läßt sich durch Probieren leicht lösen; es müssen nämlich $\frac{72}{x}$ und $\frac{72}{x+3}$, wobei x die Anzahl der Nüsse, welche jedes Mädchen erhält, bezeichnet, ganze Zahlen geben, deren Summe 20 ist. Man erhält aber nur dann ganze Zahlen, wenn x entweder 6 oder 9 ist. Da nun $\frac{72}{9} + \frac{72}{12} = 14$, also nicht 20 ist, so kann x nur 6 sein.

der Knaben ist $\frac{72}{x+3}$. Da die Gesamtzahl der Kinder 20 ist, so ist

$$\text{I.} \quad 20 = \frac{72}{x} + \frac{72}{x+3}$$

$$\text{II} = \text{I} : 4 \quad 5 = \frac{18}{x} + \frac{18}{x+3}$$

$$\text{III.} \quad 5x(x+3) = 18x + 54 + 18x$$

$$5x^2 + 15x = 36x + 54$$

$$x^2 - \frac{21}{5}x = \frac{54}{5}$$

$$x^2 - \frac{21}{5}x + \left(\frac{21}{10}\right)^2 = \frac{54 \times 20}{100} + \frac{441}{100}$$

$$\left(x - \frac{21}{10}\right)^2 = \frac{1080 + 441}{100} = \frac{1521}{100}$$

$$x - \frac{21}{10} = \pm \frac{39}{10}$$

$x_1 = 6$ Nüsse erhalten die Mädchen, 9 die Knaben.

B. Die Zahl der Mädchen war $\frac{72}{6} = 12$, der Knaben $\frac{72}{9} = 8$.

2. Lösung.

Wenn x Knaben zugegen waren und jeder y Nüsse erhielt, so betrug die Zahl der Mädchen $(20 - x)$, und jedes erhielt $(y - 3)$ Nüsse. Nach der Angabe ist

$$\text{I.} \quad xy = 72 \text{ daher } y = \frac{72}{x}$$

$$\text{II.} \quad (20 - x)(y - 3) = 72$$

$$\text{III (y in II substit.)} \quad (20 - x)\left(\frac{72}{x} - 3\right) = 72$$

$$\text{IV} = x \times \text{III} \quad (20 - x)(72 - 3x) = 72x$$

$$1440 - 72x - 60x + 3x^2 = 72x$$

$$3x^2 - 204x = -1440$$

$$x^2 - 68x = -480$$

$$x^2 - 68x + (34)^2 = 1156 - 480$$

$$x - 34 = \pm 26$$

$$x = 34 \pm 26$$

$$x_2 = 8 \text{ Knaben.}$$

Antwort: Die Anzahl der Knaben war 8, diejenigen der Mädchen 12.

1. Niederbayern. 1887.

Wenn ein Konsortium nur 30 $\mathcal{M}$ zu teilen hätte, so würde jede Person um 25 $\mathcal{S}$ weniger erhalten, als wenn es um 4 Personen weniger wären. Wie viel bekommt jedes Mitglied, wenn 36 030 $\mathcal{M}$ zu verteilen sind?

1. Lösung.

A. Wenn x Personen vorhanden sind, so erhält jede Person $\frac{30}{x}$. Wenn aber $(x - 4)$ vorhanden wären, würde jede $\frac{30}{x - 4}$ erhalten. Nach der Angabe ist

$$\begin{aligned} \text{I.} \quad & \frac{30}{x} + \frac{1}{4} = \frac{30}{x - 4} \\ \text{II} = 2x(x - 4) \times \text{I} \quad & 120x - 480 + x^2 - 4x = 120x \\ & x^2 - 4x = 480 \\ & x^2 - 4x + 4 = 484 \\ & x - 2 = \pm 22 \\ & x_1 = 24 \text{ Personen.} \end{aligned}$$

B. Von 36 030 $\mathcal{M}$ erhält jede Person $36030 : 24 = 1501,25 \mathcal{M}$.

2. Lösung.

A. Wenn x Personen vorhanden sind und jede erhält $y \mathcal{M}$, so ist $xy = 30$. Wären 4 Personen weniger vorhanden, so erhielte jede $(y + \frac{1}{4}) \mathcal{M}$, und es wäre ebenfalls $(x - 4)(y + \frac{1}{4}) = 30$; somit ist

$$\begin{aligned} \text{I.} \quad & xy = 30 \\ \text{II.} \quad & y = \frac{30}{x} \\ \text{III.} \quad & (x - 4)(y + \frac{1}{4}) = xy \\ & xy - 4y + \frac{1}{4}x - 1 = xy \\ & \frac{1}{4}x - 1 = 4y \\ \text{IV.} \quad & y = \frac{1}{16}x - \frac{1}{4} \\ \text{V (II} = \text{IV)} \quad & \frac{1}{16}x - \frac{1}{4} = \frac{30}{x} \\ & x^2 - 4x = 480 \\ & x = 24 \text{ Personen.} \end{aligned}$$

B. Von 36 030 $\mathcal{M}$ erhält jede Person $36030 : 24 = 1501,25 \mathcal{M}$.

Antwort: Jede Person erhält 1501,25 $\mathcal{M}$.

1. Unterfranken 1892.

Für die Familie eines Verunglückten wollen mehrere Personen durch gleichmäßige Beiträge 600 $\mathcal{M}$ zusammenschießen. Als weitere 2 Wohlthäter sich zur Unterstützung bereit erklärt hatten, traf jede Person 15 $\mathcal{M}$ weniger, als vorher berechnet war. Man bestimme die anfängliche Anzahl der Mitglieder und den Betrag, den jede geben wollte.

1. Lösung.

Bezeichnet x die ursprüngliche Anzahl der Wohlthäter, so ist der Beitrag eines jeden $\frac{600}{x}$. Nach dem Beitritt von 2 weiteren Mitgliedern

trifft jede Person $\frac{600}{x+2}$. Da der letztere um 15 $\mathcal{M}$. kleiner ist, so ist

$$\begin{aligned} 15 + \frac{600}{x+2} &= \frac{600}{x} \\ 1 + \frac{40}{x+2} &= \frac{40}{x} \\ x^2 + 2x + 40x &= 40x + 80 \\ x^2 + 2x &= 80 \\ x^2 + 2x + 1 &= 81 \\ x + 1 &= \pm 9 \\ x_1 &= 8 \text{ Personen, von denen jede} \\ 600 : 8 &= 75 \mathcal{M} \text{ geben wollte.} \end{aligned}$$

2. Lösung.

Bezeichnet x wieder die ursprüngliche Anzahl der Personen, y deren Beiträge, so ist

$$\begin{aligned} \text{I.} \quad xy &= 600 \text{ oder I. } xy = 600 \\ y &= \frac{600}{x} & y &= \frac{600}{x} \\ \text{II.} \quad (x+2)(y-15) &= 600 & \text{II. } xy &= (x+2)(y-15) \\ \text{III (y in II subst.) } (x+2)\left(\frac{600}{x}-15\right) &= 600 & \text{II. } xy &= xy + 2y - 15x - 30 \\ (x+2)(600-15x) &= 600x & 15x - \frac{1200}{x} &= -30 \\ (x+2)(40-x) &= 40x & x - \frac{80}{x} &= -2 \\ 40x + 80 - x^2 - 2x &= 40x & x^2 + 2x &= 80 \text{ (wie oben).} \\ x^2 + 2x &= 80 \text{ (wie oben).} \end{aligned}$$

Antwort: Anfänglich waren es 8 Mitglieder, welche je 75 $\mathcal{M}$. beitrugen wollten.

2. Pfalz. 1887.

Mit meinen pekuniären Verhältnissen, sagt A zu B, bin ich zufrieden, denn ich habe zu meinem Gehalte aus den dir vorhin angegebenen Kapitalien noch 333 $\mathcal{M}$. Zinsen jährlich einzunehmen. Da stehen wir finanziell ja fast einander gleich, entgegnete B. Ich besitze

zwar 600 $\mathcal{M}$ Kapitalien weniger, erhalte aber 7 $\mathcal{M}$ mehr als du jährliche Zinsen, da meine Kapitalien $\frac{1}{2}$ Prozent Zinsen mehr tragen als die deinigen. Wie groß sind die Kapitalien eines jeden, und welche Prozente tragen sie?

1. Lösung.

I. Die Einnahme aus dem Kapital (x) des A mit y % sind $x \times \frac{y}{100} = 333$.

II. B hat das Kapital x zu $\frac{1}{2}$ % höher aber 600 $\mathcal{M}$ weniger zu $(y + 0,5)$ % ausgeliehen. Die Mehreinnahme ist daher $\frac{x}{2} - 600 \times \left(\frac{y + 0,5}{100}\right)$. Nun ist

$$\text{I.} \quad \frac{xy}{100} = 333$$

$$\text{II.} \quad \frac{x}{200} - 6y - 3 = 7$$

$$\text{III} = \text{I} : \frac{y}{100} \quad x = \frac{33300}{y}$$

$$\text{IV (x in II)} \quad \frac{333}{2y} - 6y = 10$$

$$333 - 12y^2 = 20y$$

$$y^2 + \frac{10}{6}y^2 = \frac{111}{4}$$

$$(y + \frac{5}{6})^2 = \frac{25 + 999}{36} = \frac{1024}{36}$$

$$y = -\frac{5}{6} \pm \frac{32}{6}$$

$$y_1 = 4\frac{1}{2}\%$$

$$x = 7400 \mathcal{M}.$$

2. Lösung.

I. Wie oben $\frac{xy}{100} = 333$

II. B erhält bei $(x - 600)$ $\mathcal{M}$ Kapital und $(y + 0,5)$ % an Zinsen $(x - 600) \frac{(y + 0,5)}{100}$, welche $333 + 7 = 340$ betragen; daher

$$\text{I.} \quad \frac{xy}{100} = 333$$

$$\text{II.} \quad \frac{xy}{100} - 6y + \frac{x}{200} - 3 = 340$$

$$\text{III} = \text{II} - \text{I} \quad -6y + \frac{x}{200} = 10 \text{ u. s. w. (wie oben).}$$

Antwort: A hat 7400 $\mathcal{M}$ zu $4\frac{1}{2}\%$, B 6800 $\mathcal{M}$ zu 5% ausgeliehen.

2. Pfalz. 1890.

Heuer kann ich mit dem Ertrage meines Tabakbaues nicht zufrieden sein, sagte ein Landwirt, denn er brachte mir bei 425 *M* Reingewinn nur geringe Prozente des Wertes meiner mit dieser Handelspflanze bestellten Äcker. Vor einigen Jahren verzinsten sich diese bei 610 *M* Reingewinn doch noch $2\frac{1}{2}\%$ höher als bei der letzten Ernte; schade nur, daß ich damals eine Fläche bebaute, die um einen auf 4800 *M* gewerteten Acker kleiner war, als die diesjährige. Welchen Wert haben die Grundstücke der letzten Ernte, und wie viel Prozent Gewinn werfen sie ab?

Lösung.

I. Wenn der Wert der zuletzt bebauten Grundstücke mit x *M* und die Prozente mit y bezeichnet werden, so ist die Einnahme aus der letzten Ernte $x \times \frac{y}{100} = 425$.

II. In einem früheren Jahre war der Wert der Grundstücke $(x-48)$ *M*, die Prozente $(y+0,5)$ und die Reineinnahme $(x-4800) \times \left(\frac{y+0,5}{100}\right) = 610$. Somit ist

$$\begin{array}{ll}
 \text{I.} & xy = 42500 \\
 \text{II.} & (x-4800)(y+2,5) = 61000 \\
 \text{II.} & xy - 4800y + 2,5x - 12000 = 61000 \\
 \text{III (x y aus I in II)} & 42500 - 4800y + 2,5x = 73000 \\
 & 2,5x - 4800y = 30500 \\
 & x = 1920y - 12200 \\
 \text{IV (x in I subst.)} & (1920y + 12200)y = 42500 \\
 & 192y^2 + 1220y = 4250 \\
 & y^2 + \frac{610}{96}y = \frac{2125}{96} \\
 & y^2 + \frac{610}{96}y + \left(\frac{305}{96}\right)^2 = \frac{2125 \times 96 + 93025}{(96)^2} \\
 & (y + \frac{305}{96})^2 = \frac{297025}{(96)^2} \\
 & y = -\frac{305}{96} \pm \frac{545}{96} \\
 & y_1 = \frac{240}{96} = \frac{15}{6} = 2,5\% \\
 & x = \frac{425000}{25} = 17000 \text{ *M*.}
 \end{array}$$

Antwort: Der Wert der zuletzt bebauten Grundstücke betrug 17000 *M*; sie warfen 2,5% ab.

1. Pfalz. 1891.

Ein Kapitalist überließ einem Fabrikanten 60000 $\mathcal{M}$ gegen einen gewissen Prozentsatz. Am Ende des ersten Jahres ließ er sich von dem um die Zinsen vermehrten Kapitale 3000 $\mathcal{M}$ einhändigen, den Rest aber zu demselben Prozentsatze noch ein weiteres Jahr stehen. Nun erhielt er an Kapital und Zinsen 64236 $\mathcal{M}$; wie viel Prozente erhielt er?

Lösung.

Bezeichnet y den Prozentsatz, so betrug die Forderung nach dem ersten Jahre $60000 + 600y$. Nach der Entnahme von 3000 $\mathcal{M}$ betrug die Forderung noch $57000 + 600y$. Hiezu kamen im nächsten Jahre die Zinsen aus dieser Forderung, nämlich $(57000 + 600y) \frac{y}{100} = 570y + 6y^2$, so daß nun die Forderung betrug

$$57000 + 600y + 570y + 6y^2 = 64236$$

$$6y^2 + 1170y = 7236$$

$$y^2 + 195y = 1206$$

$$y^2 + 195y + \left(\frac{195}{2}\right)^2 = \frac{1206 \times 4 + 38025}{4}$$

$$\left(y + \frac{195}{2}\right)^2 = \frac{4824 + 38025}{4} = \frac{42849}{4}$$

$$y = -\frac{195}{2} \pm \frac{207}{2}$$

$$y_1 = \frac{1}{2} = 6\%.$$

Antwort: Der Kapitalist erhielt 6%.

1. Pfalz. 1888.

Ein Rentner hat einem Aktiengeschäft 160000 $\mathcal{M}$ zu einem gewissen Zinsfuß überlassen. Am Ende des ersten Jahres läßt er sich 2400 $\mathcal{M}$ einhändigen, den Mehrbetrag der Zinsen aber zum Kapital schreiben. Am Ende des zweiten Jahres läßt er sich abermals 2400 $\mathcal{M}$ geben und hat nun vom Geschäfte als Kapital und Zins 168987 $\mathcal{M}$ zu fordern. Wie viel Prozent erhielt der Rentner?

Lösung.

Bezeichnet $y\%$ den Zinsfuß, so hatte der Rentner nach 1 Jahr $160000 + 160000 \times \frac{y}{100} = (160000 + 1600y) \mathcal{M}$ zu fordern. Nach

Empfang von 2400 $\mathcal{M}$ betrug die Forderung noch $1600y + 157600 \mathcal{M}$.

Am Ende des zweiten war die Forderung $1600y + 157600 + (1600y$

$+ 157600) \frac{y}{100} = 1600y + 157600 + 16y^2 + 1576y = 16y^2 + 3176y$

$+ 157600$. Hievon hatte er wieder 2400 $\mathcal{M}$ entnommen, so daß

$$16y^2 + 3176y + 157600 - 2400 = 168987$$

$$16y^2 + 3176y = 13787$$

$$y^2 + \frac{397}{2}y = \frac{13787}{16}$$

$$y^2 + \frac{397}{2}y + \left(\frac{397}{4}\right)^2 = \frac{13787}{16} + \frac{157609}{16}$$

$$\left(y + \frac{397}{4}\right)^2 = \frac{171396}{16}$$

$$y = -\frac{397}{4} \pm \frac{414}{4}$$

$$y_1 = \frac{1}{4} = 4\frac{1}{4}\%.$$

Antwort: Der Rentner erhielt $4\frac{1}{4}\%$.

1. Pfalz. 1886.

Ein Rentner legte als stiller Teilhaber in zwei Geschäfte je ein Kapital und zwar in das zweite 2000 $\mathcal{M}$ mehr als in das erste. Das erste brachte ihm 480 $\mathcal{M}$ Gewinn, das zweite aber 800 $\mathcal{M}$, weil dieses letztere um 2% mehr getragen hat. Wie groß waren die angelegten Kapitalien und wie viel Prozente warf jedes der beiden Geschäfte ab?

Lösung.

Wenn das erste Kapital mit x $\mathcal{M}$, dessen Prozente mit y $\mathcal{M}$, das zweite Kapital mit $(x + 2000)$ $\mathcal{M}$ und dessen Prozente mit $(y + 2)$ $\mathcal{M}$ bezeichnet wird, dann ist

$$\begin{array}{ll}
 \text{I.} & x \times \frac{y}{100} = 480 \\
 \text{II.} & (x + 2000) \left(\frac{y + 2}{100} \right) = 800 \\
 \text{II.} & \frac{xy}{100} + \frac{2x}{100} + 20y + 40 = 800 \\
 \text{III} = \text{II} - \text{I} & \frac{2x}{100} + 20y = 800 - 480 - 40 \\
 & \frac{2x}{100} + 20y = 280 \\
 \text{I.} & \frac{x}{100} = \frac{480}{y} \\
 \text{V. } 2 \times \text{I} & \frac{2x}{100} = \frac{960}{y} \\
 \text{V (Substit.)} & \frac{960}{y} + 20y = 280 \\
 \text{VI} = \text{V} : 20 & \frac{48}{y} + y = 14 \\
 & 48 + y^2 = 14y \\
 & y^2 - 14y = -48 \\
 & y^2 - 14y + 49 = 49 - 48 \\
 & y - 7 = \pm 1 \\
 & y = 7 \pm 1 \\
 & y_1 = 8\% \\
 & y_2 = 6\% \\
 & x_1 \times \frac{8}{100} = 480 \\
 & x_1 = 6000 \mathcal{M} \\
 & x_2 = 8000 \mathcal{M}.
 \end{array}$$

Antwort: Das erste Kapital ist entweder 6000 $\mathcal{M}$ und wirft 8% ab, somit das zweite Kapital 8000 $\mathcal{M}$ mit 10%, oder das erste Kapital ist 8000 $\mathcal{M}$ mit 6% und das zweite Kapital 10000 $\mathcal{M}$ zu 8%.

1. Schwaben. 1887.

A und B haben zusammen 6500 $\mathcal{M}$ zu gleichen Prozenten ausgeliehen. Nach 2 Jahren erhielt A an Kapital und Zinsen 4400 $\mathcal{M}$ und B ebenso nach 3 Jahren 2875 $\mathcal{M}$ zurück. Welches Kapital hat jeder ausgeliehen und zu wie viel Prozent?

1. Lösung.

Beide zusammen haben $7275 - 6500 = 775$ $\mathcal{M}$ Zinsen erhalten. Wenn A x $\mathcal{M}$ Zinsen in 2 Jahren erhalten hat, so hat B in 3 Jahren $(775 - x)$ $\mathcal{M}$ und in 2 Jahren $\frac{2}{3}(775 - x)$ bekommen; ferner ist das Kapital des A $(4400 - x)$ und des B $(2100 + x)$. Von 1 $\mathcal{M}$ Kapital hat A in 2 Jahren bezogen $\frac{x}{(4400 - x)}$ und B $\frac{2}{3} \times \left(\frac{775 - x}{2100 + x} \right)$. Da die Prozente gleich waren, so ist

$$\frac{x}{4400 - x} = \frac{2}{3} \left(\frac{775 - x}{2100 + x} \right)$$

$$6300x + 3x^2 = 6820000 - 1550x - 8800x + 2x^2$$

$$x^2 + 16650x = 6820000$$

$$x^2 + 16650x + (8325)^2 = 6820000 + 69305625$$

$$(x + 8325)^2 = 77125625$$

$$x + 8325 = \pm \sqrt{77125625} = \pm 8725$$

$$x_1 = 400 \mathcal{M}$$

Antwort: Das Kapital des A war 4000 $\mathcal{M}$, sein Zins 400 $\mathcal{M}$, daher die Jahresprozente $\frac{100}{2} = 5$. Das Kapital des B war $6500 - 4000 = 2500$ $\mathcal{M}$ und war ebenfalls zu 5% ausgeliehen.

2. Lösung.

Bezeichnen x $\mathcal{M}$ und y $\mathcal{M}$ die beiden Kapitalien, $z\%$ die jährlich gewonnenen Prozente, so ist

$$\text{I.} \quad x + y = 6500$$

$$\text{II.} \quad x + \frac{2xz}{100} = 4400$$

$$\text{III.} \quad y + \frac{3yz}{100} = 2875$$

$$\text{II.} \quad x \left(\frac{100 + 2z}{100} \right) = 4400$$

$$\text{III.} \quad y \left(\frac{100 + 3z}{100} \right) = 2875$$

$$\text{IV} = \text{II} : \left(\frac{100 + 2z}{100} \right) \quad x = 4400 \times \frac{100}{(100 + 2z)}$$

$$\text{V} = \text{III} : \left(\frac{100 + 3z}{100} \right) \quad y = 2875 \times \frac{100}{100 + 3z}$$

$$\text{VII} = \text{IV} + \text{V} \quad x + y = 6500 = \frac{4400 \times 100}{100 + 2z} + \frac{2875 \times 100}{100 + 3z}$$

$$\text{VIII} = \text{VII} : 500$$

$$13 = \frac{880}{100 + 2z} + \frac{575}{100 + 3z}$$

$$13(100 + 2z)(100 + 3z) = 880(100 + 3z) + 575(100 + 2z)$$

$$130000 + 6500z + 78z^2 = 88000 + 2640z + 57500 + 1150z$$

$$78z^2 + 2710z = 15500$$

$$z^2 + \frac{1355}{39}z = \frac{7750}{39}$$

$$z^2 + \frac{1355}{39}z + \left(\frac{1355}{78}\right)^2 = \frac{1836025}{(78)^2} + \frac{4 \times 39 \times 7750}{(78)^2}$$

$$\left(z + \frac{1355}{78}\right)^2 = \frac{3045025}{(78)^2}$$

$$z = -\frac{1355}{78} \pm \frac{1745}{78}$$

$$z_1 = \frac{390}{78} = 5\%.$$

3. Lösung.

$$\text{I.} \quad x + y = 6500$$

$$\text{II.} \quad x + \frac{2xz}{100} = 4400$$

$$\text{III.} \quad y + \frac{3yz}{100} = 2875$$

$$\text{IV} = 3y \times \text{II} \quad 3xy + \frac{6xyz}{100} + 13200y$$

$$\text{V} = 2x \times \text{III} \quad 2xy + \frac{6xyz}{100} = 5750x$$

$$\text{VI} = \text{IV} - \text{V} \quad xy = 13200y - 5750x$$

$$\text{VIII (aus I y)} \quad x(6500 - x) = 13200(6500 - x) - 5750x$$

u. s. w.

$$x = 4000 \text{ M.}$$

$$y = 2500 \text{ M.}$$

$$z = 5\%.$$

1. Schwaben. 1895.

A und B legen zu einer gemeinschaftlichen Unternehmung 5500 M. zusammen. A läßt sein Geld 6 Monate, B das seinige 8 Monate im Geschäft. Nach Beendigung desselben wurde der Gewinn nach Verhältnis der Einlage und Zeit verteilt, und es bekam A als Einlage und Gewinn 2300 M., B dagegen 4200 M. Wie viel hat jeder beigeschossen?

1. Lösung.

Der gemeinsame Gewinn ist $2300 + 4200 - 5500 = 1000$. Wenn A hievon x $\mathcal{M}$ gewonnen hat, so trifft für B $(1000 - x)$. Ferner war die Einlage des A $(2300 - x)$, diejenige des B $[4200 - (1000 - x)] = 3200 + x$. Da die Anteile am Gewinne sich wie die Produkte aus den Kapitalien in die bezüglichen Zeiten verhalten, so ist

$$\begin{aligned} x : (1000 - x) &= 6 (2300 - x) : 8 (3200 + x) \\ x : (1000 - x) &= (6900 - 3x) : (12800 + 4x) \\ 1000 : x &= (19700 + x) : (6900 - 3x) \\ 19700x + x^2 &= 6900000 - 3000x \\ x^2 + 22700x &= 6900000 \\ x + 22700x + (11350)^2 &= 6900000 + 128822500 \\ (x + 11350)^2 &= 135722500 \\ x + 11350 &= \pm 11650 \\ x_1 &= 300 \mathcal{M}. \end{aligned}$$

Antwort: A hat vom Gewinn 300 $\mathcal{M}$ erhalten und 2000 $\mathcal{M}$ eingelegt; der Gewinn des B war 700 $\mathcal{M}$ und die Einlage 3500 $\mathcal{M}$.

2. Lösung.

Wenn x $\mathcal{M}$ die Einlage des A, y $\mathcal{M}$ diejenige des B und z den monatlichen Gewinn bezeichnet, so ist

$$\begin{aligned} \text{I.} \quad & x + x \times \frac{z}{100} \times 6 = 2300 \\ \text{II.} \quad & y + y \times \frac{z}{100} \times 8 = 4200 \\ \text{III.} \quad & x + y = 5500 \\ \text{IV} = 100 \times \text{I} \quad & x(100 + 6z) = 230000 \\ \text{V} = 100 \times \text{II} \quad & y(100 + 8z) = 420000 \\ \text{VI} = \text{IV} : (100 + 6z) \quad & x = \frac{230000}{100 + 6z} \\ \text{VII} = \text{V} : (100 + 8z) \quad & y = \frac{420000}{100 + 8z} \\ \text{VIII} = \text{IV} + \text{VII} \quad & x + y = \frac{230000}{100 + 6z} + \frac{420000}{100 + 8z} \\ \text{IX (Subst.)} \quad & 5500 = \frac{230000}{100 + 6z} + \frac{420000}{100 + 8z} \\ \text{X} = \text{IX} : 500 \quad & 11 = \frac{460}{100 + 6z} + \frac{840}{100 + 8z} \end{aligned}$$

$$XI = X(100 + 6z)(100 + 8z)$$

$$110000 + 15400z + 528z^2 = 46000 + 3680z + 84000 + 5040z$$

$$528z^2 + 6680z = 20000$$

$$z^2 + \frac{835}{66}z = \frac{2500}{66}$$

$$z^2 + \frac{835}{66}z + \left(\frac{835}{132}\right)^2 = \frac{697225}{(132)^2} + \frac{660000}{(132)^2}$$

$$\left(z + \frac{835}{132}\right)^2 = \frac{1357225}{(132)^2}$$

$$z + \frac{835}{132} = \pm \frac{1165}{132}$$

$$z_1 = \frac{1165 - 835}{132} = \frac{330}{132} = 2,5\%$$

Da in jedem Monate 2,5% gewonnen wurden, so hat A in 6 Monaten 15% und B in 8 Monaten 20% erhalten.

Hiernach betrug die Einzahlung des A $\frac{2300}{115} \times 100 = 2000 \text{ M.}$

B $= 3500 \text{ M.}$

1. Niederbayern. 1891.

Ein Rentier (Witwer), der sein Vermögen in zwei Kapitalien ausstehen hat, und zwar das kleinere zu $4\frac{1}{2}\%$, das um 20 000 M. größere zu 4%, bestimmt, daß das Vermögen unter seine Kinder gleichmäßig zu verteilen sei. Er stirbt und unmittelbar darauf sterben zwei seiner Kinder. Die Kosten der Beerdigung u. s. w. erheischen die Summe von 2200 M., oder gerade so viel als die hiefür zu erhebenden Zinsen des größeren Kapitals für 3 und des kleineren für 4 Monate zusammen ausmachen. Wie viel erbt jedes Kind, wenn der Tod der beiden Geschwister jedem der übrigen Kinder 15 000 M. mehr zuweist?

Lösung.

Durch die Angaben im ersten Teile der Aufgabe läßt sich die zu verteilende Summe berechnen; die Angaben im zweiten Teile dienen zur Ermittlung der Anzahl der Kinder.

A. 1. Lösung. 20 000 M. zu 4% bringen in 3 Monaten 200 M. Zinsen, so daß 2000 M. die Zinsen zweier gleich großer Kapitalien sind, von denen das eine 3 Monate, das andere 4 Monate ausgeliehen ist. Je 600 M. dieser Kapitalien bringen $600 \times \frac{4}{100} \times \frac{3}{12} = 6 \text{ M.}$ und $600 \times \frac{4,5}{100} \times \frac{4}{12} = 9 \text{ M.}$, zusammen monatlich 15 M.

Das Kapital, das unter den angeführten Bedingungen 2000 M. Zinsen gibt, ist daher $\frac{2000}{15} \times 1200 = 160000 \text{ M.}$ Das zu verteilende Kapital beträgt $160000 + 20000 = 180000 \text{ M.}$

A. 2. Lösung. Bezeichnet x das kleinere Kapital, so ist $x + 20000$ das größere; ferner ist

$$(x + 20000) \times \frac{4}{100} \times \frac{1}{2} + x \times \frac{4,5}{100} \times \frac{1}{2} = 2200$$

$$\frac{x + 20000}{100} + \frac{1,5 x}{100} = 2200$$

$$2,5 x + 20000 = 220000$$

$$x = 80000 \text{ M.}$$

Das kleinere Kapital ist 80 000 M., das größere 100 000 M., die zu verteilende Summe 180 000 M.

B. 1. Lösung. Bezeichnet y und $y - 2$ die Anzahl der Kinder, so waren für jedes Kind anfänglich gerechnet $\frac{180000}{y}$ M., während, nachdem 2 gestorben waren, die anderen $\frac{180000}{y - 2}$ M. erhielten. Laut der Angabe ist

$$\frac{180000}{y - 2} - \frac{180000}{y} = 15000$$

$$\frac{12}{y - 2} - \frac{12}{y} = 1$$

$$12 y - 12 y + 24 = y^2 - 2 y$$

$$y^2 - 2 y = 24$$

$$y^2 - 2 y + 1 = 25$$

$$y = 1 \pm 5$$

$$y_1 = 6 \text{ Kinder.}$$

B. 2. Lösung. Von y ursprünglich vorhandenen Kindern erhielt jedes z M., dann ist

I.

$$y z = 180000$$

$$z = \frac{180000}{y}$$

II.

$$(y - 2) (z + 15000) = 180000$$

III.

$$(y - 2) \left(\frac{180000}{y} + 15000 \right) = 180000$$

$$IV = III : 15000$$

$$(y - 2) \left(\frac{12}{y} + 1 \right) = 12$$

$$(y - 2) (12 + y) = 12 y$$

$$12 y - 24 + y^2 - 2 y = 12 y$$

$$y^2 - 2 y = 24$$

$$y_1 = 6$$

B. 3. Lösung. Wenn jedes Kind ursprünglich z $\mathcal{M}$ erhalten hätte, so war die Anzahl der Kinder $\frac{180000}{z}$, später aber war sie $\frac{180000}{z+15000}$ wobei der letztere Ausdruck um 2 größer ist. Demnach ist

$$\begin{aligned} 2 + \frac{180000}{z+15000} &= \frac{180000}{z} \\ 1 + \frac{90000}{z+15000} &= \frac{90000}{z} \\ z^2 + 15000z + 90000z &= 90000z + 90000 \times 15000 \\ z^2 + 15000z &= 90000 \times 15000 \\ z^2 + 15000z + (7500)^2 &= (5 \times 1500)^2 + 600(1500)^2 \\ (z + 7500)^2 &= (1500)^2 \times 625 \\ z + 7500 &= \pm 1500 \times 25 \\ z_1 &= 1500 \times 20 = 30000 \mathcal{M}. \end{aligned}$$

C. Jedes Kind erbte $180000 : 4 = 45000 \mathcal{M}$ oder $30000 + 15000 \mathcal{M} = 45000 \mathcal{M}$.

1. Oberfranken. 1892.

A und B geben zu einem Geschäfte zusammen 5000 $\mathcal{M}$ und zwar A auf 12, B auf 16 Monate. Bei der Teilung erhielt A 2500 $\mathcal{M}$ Kapital samt Gewinn, B erhielt 4000 $\mathcal{M}$. Wie viel hat jeder eingelegt?

1. Lösung.

Wenn A x $\mathcal{M}$ eingelegt und jährlich $z\%$ gewonnen hat, so beträgt Einlage und Gewinn $x + x \frac{z}{100} = 2500 \mathcal{M}$. B hat dann $(5000 - x) \frac{z}{100} \times \frac{4}{3} \mathcal{M}$ gewonnen, so daß seine Einlage und sein Gewinn $(5000 - x) + (5000 - x) \times \frac{z}{100} \times \frac{4}{3} = (5000 - x) \left(1 + \frac{4z}{300}\right) = 4000 \mathcal{M}$ betragen. Hiedurch erhält man

$$\begin{aligned} \text{I.} \quad & x \left(1 + \frac{z}{100}\right) = 2500 \\ \text{II.} \quad & (5000 - x) \left(1 + \frac{4z}{300}\right) = 4000 \\ \text{III} = \text{I} : \left(1 + \frac{z}{100}\right) & \quad x = \frac{250000}{100 + z} \\ \text{IV} = \text{II} : \left(1 + \frac{4z}{300}\right) & \quad 5000 - x = \frac{1200000}{300 + 4z} \\ \text{V} = \text{III} + \text{IV} & \quad 5000 = \frac{250000}{100 + z} + \frac{1200000}{300 + 4z} \\ \text{VI} = \text{V} : 5000 & \quad 1 = \frac{50}{100 + z} + \frac{240}{300 + 4z} = \frac{50}{100 + z} + \frac{60}{75 + z} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{VII} &= \text{VI} \times (100 + z) (75 + z) & 7500 + 175z + z^2 &= 3750 + 50z + 6000 + 60z \\
 & & z^2 + 65z &= 2250 \\
 & & z^2 + 65z + \left(\frac{65}{2}\right)^2 &= \frac{2250 \times 4 + 4225}{4} \\
 & & \left(z + \frac{65}{2}\right)^2 &= \frac{13225}{4} \\
 & & z + \frac{65}{2} &= \pm \frac{115}{2} \\
 & & z_1 &= \frac{50}{2} = 25\% \\
 & & x &= \mathbf{2000 \text{ M.}}
 \end{aligned}$$

2. Lösung.

Wenn die Einlage des A x M., des B y M. war und $z\%$ jährlich gewonnen worden sind, so ist

$$\begin{aligned}
 \text{I.} & & x + y &= 5000 \\
 \text{II.} & & x + \frac{xz}{100} &= 2500 \\
 \text{III.} & & y + \frac{4yz}{300} &= 4000 \\
 \text{IV} &= \frac{4}{3}y \times \text{II} & \frac{4xy}{3} + \frac{4xyz}{300} &= \frac{10000y}{3} \\
 \text{V} &= x \times \text{III} & xy + \frac{4xyz}{300} &= 4000x \\
 \text{VI} &= \text{IV} - \text{V} & \frac{xy}{3} &= \frac{10000y}{3} - 4000x \\
 \text{VII} &= 3 \times \text{VI} & xy &= 10000y - 12000x \\
 \text{VIII. (Aus I den Wert von } y \text{ in VII eingesetzt.)} & & & \\
 \text{VIII.} & & x(5000 - x) &= 10000(5000 - x) - 12000x \\
 & & 5000x - x^2 &= 50000000 - 10000x - 12000x \\
 & & -x^2 + 27000x &= 50000000 \\
 & & x^2 - 27000x &= -50000000 \\
 & & x^2 - 27000x + (13500)^2 &= 182250000 - 50000000 \\
 & & (x - 13500)^2 &= 132250000 \\
 & & x &= 13500 \pm 11500 \\
 & & x_2 &= \mathbf{2000 \text{ M.}}
 \end{aligned}$$

3. Lösung.

A hat x M. gewonnen und $(2500 - x)$ M. eingelegt, somit mit je 1 M. jährlich $\frac{x}{2500 - x}$ gewonnen. B hat in 16 Monaten $(1500 - x)$ M., somit jährlich $\frac{3}{4}(1500 - x)$ gewonnen; seine Einlage war $4000 - (1500 - x) = (2500 + x)$. Mit je 1 M. hat B im Jahre $\frac{3}{4} \times \left(\frac{1500 - x}{2500 + x}\right)$ gewonnen.

Nun ist

$$\begin{aligned}\frac{x}{2500 - x} &= \frac{3(1500 - x)}{4(2500 + x)} \\ 10000x + 4x^2 &= 11250000 - 7500x - 4500x + 3x^2 \\ x^2 + 22000x &= 11250000 \\ x^2 + 22000x + (11000)^2 &= 11250000 + 121000000 \\ (x + 11000)^2 &= 132250000 \\ x + 11000 &= \pm 11500 \\ x_1 &= 500 \text{ M.}\end{aligned}$$

Antwort: A hat 2000 M, B 3000 M eingelegt.

1. Oberpfalz. 1893.

An einem Unternehmen hatten sich unter anderen Personen auch die Personen A und B mit einer Einlage von zusammen 900 M beteiligt und zwar A $1\frac{1}{2}$ Jahre, B $\frac{2}{3}$ Jahre lang. Einlage und Gewinn betrugen zusammen für A 472, für B 540 M. Wie groß war die Einlage jeder Person, und wieviel Prozent Gewinn hatte das Unternehmen jährlich erzielt?

1. Lösung.

Wenn man das erste Kapital mit x M, das zweite mit y M und die jährlichen Gewinnprozente mit z bezeichnet, so ist

$$\begin{aligned}\text{I.} \quad & x + y = 900 \\ \text{II.} \quad & x + x \times \frac{z}{100} \times \frac{3}{2} = 472 \\ \text{III.} \quad & y + y \times \frac{z}{100} \times \frac{2}{3} = 540 \\ & \text{II.} \quad x \left(\frac{200 + 3z}{200} \right) = 472 \\ \text{IV.} \quad & x = \frac{472 \times 200}{200 + 3z} \\ & \text{III.} \quad y \left(\frac{300 + 2z}{300} \right) = 540 \\ \text{V.} \quad & y = \frac{540 \times 300}{300 + 2z} \\ & \text{VI} = \text{IV} + \text{V} \quad x + y = \frac{472 \times 200}{200 + 3z} + \frac{540 \times 300}{300 + 2z} \\ \text{VII (Substit.)} \quad & 900 = \frac{472 \times 200}{200 + 3z} + \frac{540 \times 300}{300 + 2z} \\ \text{VIII} = \text{VII} : 100 \quad & 9 = \frac{944}{200 + 3z} + \frac{1620}{300 + 2z}\end{aligned}$$

$$IX = (200 + 3z)(300 + 2z) \times VIII$$

$$9(200 + 3z)(300 + 2z) = 944(300 + 2z) + 1620(200 + 3z)$$

$$9(60000 + 1300z + 6z^2) = 283200 + 1888z + 324000 + 4860z$$

$$540000 + 11700z + 54z^2 = 607200 + 6748z$$

$$X \quad 54z^2 + 4952z = 67200$$

$$XI = X : 54 \quad z^2 + \frac{2476}{27}z = \frac{33600}{27}$$

$$(3. \text{ Glied erg\u00e4nzt}) \quad z^2 + \frac{2476}{27}z + \left(\frac{1238}{27}\right)^2 = \frac{1532644 + 33600 \times 27}{(27)^2}$$

$$XII. \quad (z + \frac{1238}{27})^2 = \frac{2439844}{(27)^2}$$

$$XIII. \quad z + \frac{1238}{27} = \pm \frac{1562}{27}$$

$$z_1 = \frac{1562 - 1238}{27} = \frac{324}{27} = 12\%$$

$$IV. \quad x = \frac{472 \times 200}{236} = 400 \text{ M.}$$

$$V. \quad y = \frac{540 \times 300}{324} = \frac{60 \times 300}{36} = 500 \text{ M.}$$

Antwort: A hat **400 M.**, B **500 M.** eingelegt. Es wurden **12%** gewonnen.

2. Lösung.

I. Der gemeinsame Gewinn war $1012 - 900 = 112 \text{ M.}$ Wenn A hievon $x \text{ M.}$ erhielt, so bekam B $(112 - x) \text{ M.}$

II. A hat $x \text{ M.}$ in $1\frac{1}{2}$ Jahren gewonnen d. i. $\frac{2}{3}x$ in 1 Jahr. Seine Einlage war $472 - x$, und der j\u00e4hrliche Gewinn mit 1 M. Einlage betrug $\frac{2}{3} \times \frac{x}{(472 - x)}$.

III. B hat $(112 - x) \text{ M.}$ in $\frac{2}{3}$ Jahren gewonnen d. i. $\frac{2}{3}(112 - x)$ im Jahre. Seine Einlage war $540 - (112 - x) = (428 + x) \text{ M.}$ und der j\u00e4hrliche Gewinn mit 1 M. betrug $\frac{2}{3} \times \frac{(112 - x)}{(428 + x)}$. Nun ist

$$\frac{2x}{3(472 - x)} = \frac{2}{3} \times \frac{112 - x}{(428 + x)}$$

$$\frac{2x}{1416 - 3x} = \frac{336 - 3x}{856 + 2x}$$

$$1712x + 4x^2 = 475776 - 4248x - 1008x + 9x^2$$

$$5x^2 - 6968x = -475776$$

$$x^2 - 1393,6x = -95155,2$$

$$x^2 - 1393,6x + (696,8)^2 = 485530,24 - 95155,2$$

$$(x - 696,8)^2 = 390375,04$$

$$x - 696,8 = \pm 624,8$$

$$x_2 = 72 \text{ M.}$$

A hat in $1\frac{1}{2}$ Jahren **72 M.** gewonnen; seine Einlage war also **400 M.** und rentierte sich zu **12%** p. a. Die Einlage des B betrug **500 M.** und sein Gewinn **40 M.**

3. Oberbayern. 1896.

(Nachträglich eingeschaltet.)

Drei gezähnte Räder, welche mit ihren Zähnen ineinander greifen, bewegen sich ungleich um ihre Achsen. Bis sich das erste 3mal umdreht, ist das zweite nur 1mal umgegangen, und bis sich das dritte Rad 2mal umdreht, muß das erste 27mal rotieren. Zieht man vom Quadrate der Anzahl der Zähne des dritten Rades das Produkt aus der Anzahl der Zähne der beiden anderen Räder ab, so erhält man die Zahl 25812. Wie viele Zähne hat jedes der drei Räder?

Lösung.

Die Zahl der Umdrehungen in einer bestimmten Zeit sind beim ersten Rad 27, beim zweiten 9 und beim dritten 2. Wenn das erste Rad x Zähne hat, so gehen an einem Punkte über dem Umfange $27x$ Zähne vorüber, beim zweiten Rade mit y Zähne gehen $9y$ Zähne und beim dritten Rade mit z Zähnen $2z$ vorüber. Da die Zähne ineinander greifen, so ist $27x = 9y = 2z$.

Nun ist	I.	$z = \frac{27}{2} x$
	II.	$y = 3x$
	III.	$z^2 - xy = 25812$
	IV. (Substit.)	$(\frac{27}{2} x)^2 - 3x^2 = 25812$
		$729x^2 - 12x^2 = 4 \times 25812$
		$717x^2 = 4 \times 25812$
		$x^2 = 4 \times 36$
		$x = 12 \text{ Zähne.}$

Antwort: Das erste Rad hat **12**, das zweite **36** und das dritte **162 Zähne**.

C. Lösungen von Aufgaben aus der Physik.

4. Schwaben. 1885.

Das Rad einer Welle hat einen Durchmesser von 95 cm und die Welle selbst einen Durchmesser von 18 cm. Wie viel Kraft gehört dazu, um mit dieser Vorrichtung eine Last von 164 kg im Gleichgewicht zu halten?

Lösung.

Die statischen Momente sind 18×164 und $95 \times x$, wobei x die gesuchte Kraft bezeichnet. Es ist im Falle des Gleichgewichtes

$$95x = 18 \times 164$$

$$x = \frac{2952}{95} = 31,073 \text{ kg.}$$

Antwort: **31,073 kg.**

1. Oberbayern. 1881.

In einem Kohlenbergwerke befanden sich zur Förderung der Steinkohlen 2 Dampfmaschinen. Die erste brachte in je 5 Stunden 1728 Zentner auf eine Höhe von $208\frac{1}{3}$ m, die zweite in je 3 Stunden 1600 Zentner auf eine Höhe von 180 m. Beide Dampfmaschinen wurden an denselben Ort hingebraht, und es fand sich, daß, nachdem die erste bereits $1\frac{3}{4}$ Stunden gearbeitet hatte, ehe die zweite anfang, diese doch nach 7 Stunden 225 Zentner mehr lieferte als jene. Aus welcher Tiefe förderten beide Maschinen die Steinkohlen zu tage?

L ö s u n g.

Die stündliche Arbeitsleistung der ersten Maschine ist

$$(1728 \times 50 \times \frac{6.25}{3}) : 5 = 3\,600\,000 \text{ Kilogrammometer.}$$

Die stündliche Arbeitsleistung der zweiten Maschine ist

$$(1600 \times 50 \times 180) : 3 = 4\,800\,000 \text{ Kilogrammometer.}$$

In $8\frac{3}{4}$ Stunden förderte die erste Maschine zu tage

$$3\,600\,000 \times \frac{3.5}{4} = 3\,150\,000 \text{ Kilogrammometer.}$$

In 7 Stunden förderte die zweite Maschine zu tage

$$4\,800\,000 \times 7 = 33\,600\,000 \text{ Kilogrammometer.}$$

Demnach lieferte die zweite Maschine $33\,600\,000 - 3\,150\,000 = 30\,450\,000$ Kilogrammometer mehr. Da das Gewicht dieser größeren Arbeitsleistung $225 \times 50 = 11\,250$ Kilogramm betrug, so war der von denselben zurückgelegte Weg $30\,450\,000 : 11\,250 = 2\,706\frac{2}{3}$ m.

Antwort: Die Steinkohlen wurden aus einer Tiefe von $186\frac{2}{3}$ m zu tage gefördert.

2. Pfalz. 1886.

Um zwei Räder, deren Umfänge sich verhalten wie 5:3, sind zwei Seile geschlungen, deren Differenz um 280 m größer ist, als die Differenz der Umfänge der Räder. Das längere Seil läßt sich 12mal mehr um das größere Rad wickeln, als das kürzere Seil um das kleinere Rad; und wenn das größere Rad sich 3mal so schnell dreht, als das kleinere, so wickeln sich beide Seile zu gleicher Zeit ab. Wie lang sind die Seile, und wie groß die Umfänge der Räder?

L ö s u n g.

Es bezeichne x_1 m die Länge des ersten Seiles, x_2 m die Länge des zweiten Seiles, u_1 m die Größe des Umfanges des ersten Rades und u_2 m den Umfang des zweiten Rades, dann ist

$$\text{I.} \quad u_1 : u_2 = 5 : 3$$

$$\text{II.} \quad x_1 - x_2 = u_1 - u_2 + 280$$

Jedes Seil läßt sich so oftmal um das betreffende Rad wickeln, als der Umfang des Rades in der Länge des Seiles enthalten ist, daher

$$\text{III.} \quad \frac{x_1}{u_1} = \frac{x_2}{u_2} + 12$$

Ein Punkt am Umfange des ersten Rades hat, wenn das Rad in der Zeiteinheit sich 3mal umdreht, die Geschwindigkeit $3 u_1$. Der in t Zeiteinheiten zurückgelegte Weg d. i. die Länge des ersten Seiles ist $x_1 = 3 u_1 t$. Entsprechend ist $x_2 = u_1 t$. Da die Zeiten gleich sind, so ist

$$\text{IV.} \quad \frac{x_1}{3 u_1} = \frac{x_2}{u_2}.$$

Zu Bestimmung der 4 unbekannten Grössen hat man die 4 Gleichungen:

$$\text{I.} \quad \frac{u_1}{u_2} = \frac{5}{3}$$

$$\text{II.} \quad x_1 - x_2 = u_1 - u_2 + 280$$

$$\text{III.} \quad \frac{x_1}{u_1} = \frac{x_2}{u_2} + 12$$

$$\text{IV.} \quad \frac{x_1}{3 u_1} = \frac{x_2}{u_2}$$

$$\text{V} = \text{IV} - \text{III} \quad \frac{x_1}{u_1} - \frac{x_1}{3 u_1} = 12$$

$$\frac{2 x_1}{3 u_1} = 12$$

$$x_1 = 18 u_1$$

$$\text{VI} = 3 \times \text{IV}$$

$$\frac{x_1}{u_1} = \frac{3 x_2}{u_2}$$

$$\text{VII (Compar.)}$$

$$\frac{3 x_2}{u_2} = \frac{x_2}{u_2} + 12$$

$$\frac{x_2}{u_2} = 6$$

$$x_2 = 6 u_2$$

$$\text{VIII} = u_2 \times \text{I}$$

$$u_1 = \frac{5}{3} u_2$$

Setzt man $x_1 = 18 u_1 = 18 \times \frac{5}{3} u_2 = 30 u_2$, dann $x_2 = 6 u_2$ und $u_1 = \frac{5}{3} u_2$ in die Gleichung II, so erhält man

$$30 u_2 - 6 u_2 = \frac{5}{3} u_2 - u_2 + 280$$

$$u_2 = 4 \times 3 = 12 \text{ m}$$

Somit ist ferner

$$u_1 = \frac{5}{3} \times 12 = 20 \text{ m}$$

$$x_1 = 18 \times 20 = 360 \text{ m}$$

$$x_2 = 6 \times 12 = 72 \text{ m.}$$

Antwort: Die Längen der Seile sind 360 m und 72 m. Die Größe der Umfänge der Räder ist 20 m und 12 m.

4. Pfalz. 1883.

Die Germania des Nationaldenkmales auf dem Niederwalde soll 700 Zentner (à 50 kg) wiegen. a) Welches Volumen hat das dazu verwendete Metall, wenn das spezifische Gewicht desselben als 8,6 angenommen wird? b) Wie groß wäre die Kante des massiven Würfels, welcher sich aus dieser Metallmasse formen liesse?

Lösung.

A. Bezeichnet V das Volumen in Litern, so ist

$$V \times 8,6 = 3500 \text{ kg}$$

$$V = \frac{35000}{8,6} = 406,976744 \text{ cdm.}$$

B. Ist die Würfelkante y , so ist das Volumen des Würfels

$$y^3 = 406,976744$$

$$y = \sqrt[3]{406,976744} = 7,412 \text{ dm.}$$

Antwort: a) Das Volumen des Metalles ist 406,976744 cdm; die Kante eines inhaltsgleichen Würfels mißt 7,411 dm.

4. Unterfranken. 1891.

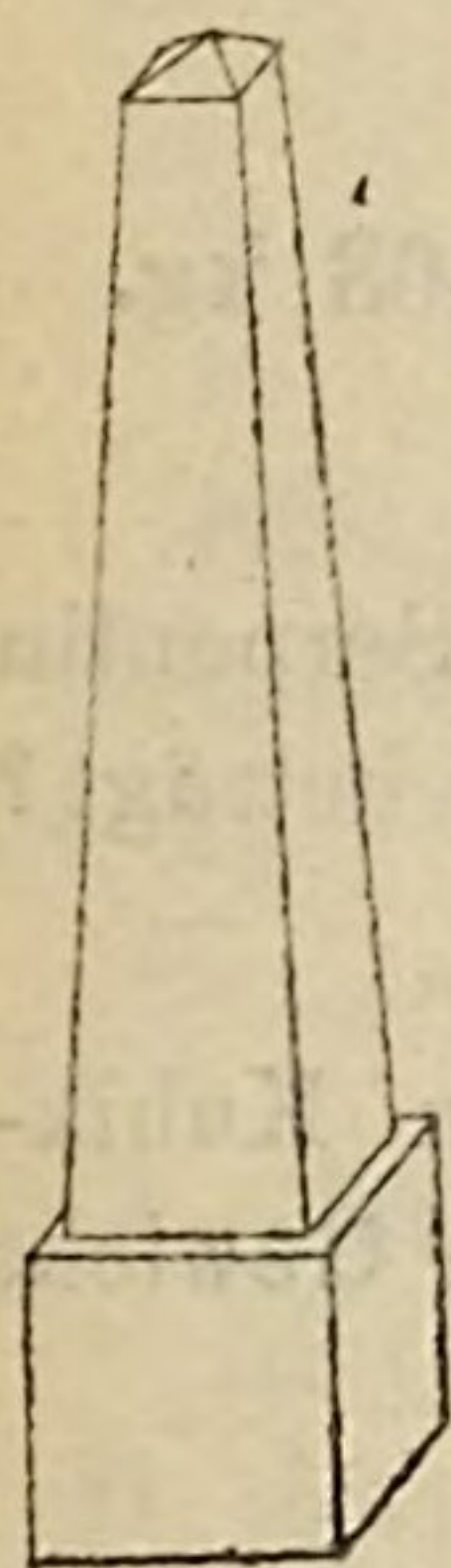


Fig. 1.

Ein Denkmal besteht aus einem würfelförmigen Fuß von 1,5 m Kante, einer abgekürzten quadratischen Pyramide, welche unten 1,2 m, oben 0,48 Seite und eine Höhe von 8,4 m hat, und oben aus einer Pyramide von 2 dm Höhe. Wie schwer wiegt das Denkmal, wenn es aus Granit gefertigt ist, dessen spezifisches Gewicht 2,7 beträgt?

Lösung.

I. Der körperliche Inhalt des Denkmals ist

$$(15)^3 + \frac{8,4}{3} [(12)^2 + 12 \times 4,8 + (4,8)^2] + \frac{2}{3} \times (4,8)^2 = 9680,28 \text{ cdm.}$$

II. Das Gewicht der Masse ist $9680,28 \times 2,7 = 26136,756 \text{ kg.}$

5. Oberbayern. 1889.

Zu einem kupfernen Kessel, dessen kreisförmige lichte Öffnung eine Weite von 1,20 m hat, soll ein 2 mm dicker Deckel von gleichem Metalle gefertigt werden, dessen Rand ringsum 3 cm über den Kessel vorsteht. Wie schwer ist der Deckel, wenn das spezifische Gewicht des Kupfers 8,85 ist, und der als Handhabe dienende Messingknopf 475 g wiegt?

Lösung.

Da über die Dicke der Kesselwandung keine Angabe gemacht ist, so ist für dieselbe wohl ebenfalls 2 mm anzunehmen, so daß der

Durchmesser des Deckels $2r = 120 + 2 \times 0,2 + 2 \times 3 = 126,4$ cm, somit $r = 63,2$ cm ist. Das Volumen des Deckels (V) ist dann

$$V = (63,2)^2 \times 3,14 \times 0,2$$

$$V = 2508,38272 \text{ ccm}$$

Das Gewicht (P) des Deckels ist $G = 2508,38272 \times 8,85 + 475$

$$G = 22674,4 \text{ g} = 22 \text{ kg } 674,4 \text{ g.}$$

Antwort: Das Gewicht des Deckels ist 22 kg 674,4 g.

3. Mittelfranken. 1889.

Welches ist das absolute Gewicht einer geraden, sechsseitigen, prismatischen Säule aus Granit, wenn jede Seitenkante derselben 14,4 m mißt, Grund- und Seitenkanten im Verhältnisse 1:20 stehen, die Basis ein reguläres Sechseck bildet und das spezifische Gewicht des Granites 2,40 ist?

Lösung.

I. Die Seitenkante hat 144 dm, die Grundkante 7,2 dm.

II. Die Grundfläche hält $6 \times \frac{(7,2)^2}{4} \sqrt{3} = 3 \times 3,6 \times 7,2 \times 1,732 = 134,68$ qdm.

III. Der Kubikinhalt $V = 134,68 \times 144 = 19393,92$ cdm.

IV. Das Gewicht (P) beträgt $P = 19393,92 \times 2,4 = 46545,408$ kg.

4. Unterfranken. 1883.

Was wiegt eine reguläre, sechsseitige Pyramide von Serpentin (2,6 sp. Gew.), wenn die Grundkante 4 cm und die Höhe 12 cm beträgt?

Lösung.

Das Gewicht (G) in g wird erhalten, wenn man das in Kubikcentimetern ausgedrückte Volumen (V) mit dem spezifischen Gewicht multipliziert.

$$V = 6 \times \frac{4^2}{4} \times 1,732 \times \frac{12}{3} = 166,272 \text{ ccm}$$

$$G = 166,272 \times 26 = 432,3072 \text{ g.}$$

Antwort: Die Pyramide wiegt 432,3072 g.

3. Unterfranken. 1887.

Ein Eisenbahn-Packwagen hat eine Tragkraft von 10 000 kg. Wie viele 6 cm dicke und 3 m lange runde Eisenstäbe vom spez. Gewichte 7,2 kann man aufladen?

Lösung.

I. Das Volumen eines Eisenstabes ist $V = (0,3)^2 \pi \times 30 = 8,478$ dm.

II. Das Gewicht (P) eines Stabes ist $P = 8,478 \times 7,2 = 61,0416$ kg.

III. Die Zahl der Stäbe, welche aufgeladen werden können, beträgt

$$\frac{10000}{61,0416} = 164 \text{ (Stäbe).}$$

3. Mittelfranken. 1890.

Eine 10 m lange und 1,4 m dicke cylindrische Säule aus Marmor bricht entzwei, so daß die Bruchfläche zwar eben ist, aber die Achse schief durchschneidet. Wenn nun die kürzere Seitenlinie des größeren Bruchstückes 7 m und die längere Seitenlinie desselben 8 m mißt, wie schwer ist jedes dieser Bruchstücke, das spez. Gewicht des Marmors zu 2,5 angenommen?

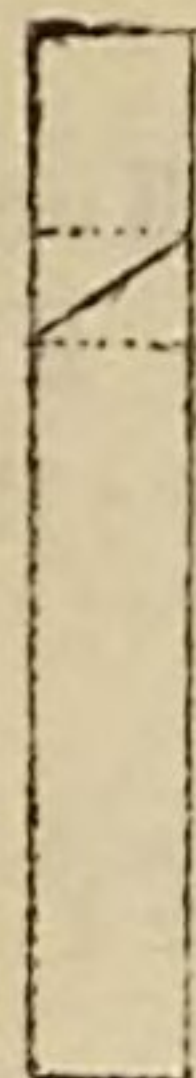


Fig. 2.

Lösung.

- I. Dem größeren Teile gehört ein 7,5 m langes Stück an, dem kleineren ein $2\frac{1}{2}$ m langes.
- II. Das Gewicht eines Stückes, das 1 m lang ist, beträgt $7 \times 7 \times 1,4^2 \times 10 \times 2,5 = 3850$ kg.
- III. Das Gewicht des kleineren Stückes ist $3850 \times 2,5 = 9625$ kg.
- IV. Das Gewicht des größeren Stückes ist $9625 \times 3 = 28875$ kg.

Antwort: Das kleinere Stück wiegt 9625 kg, das größere 28875 kg.

4. Pfalz. 1886.

Ein gerader Kegel aus Buchenholz von 48 cm Höhe wiegt 2453,906232 g. Wie groß ist der Durchmesser der Grundfläche dieses Kegels, wenn das spezifische Gewicht des Buchenholzes 0,75 beträgt?

Lösung.

- I. Das Volumen (V) wird gefunden, wenn man das absolute Gewicht durch die Dichtigkeit dividiert.
- II. Aus dem Volumen und der Höhe kann man die Grundfläche (F) berechnen.
- III. Ist die Größe des Grundkreises gefunden, so läßt sich der Halb- und Durchmesser bestimmen.

Ausführung.

- I. $V = 2453,906232 : 0,75 = 3271,874976$ ccm.
- II. $F = 3 V : 48 = \frac{3271,874976}{16} = 204,492186$ qcm.
- III. $r^2 = \frac{204,492186}{3,14} = 65,1249$
 $r = 8,07$ cm.
- IV. Der Durchmesser beträgt 16,14 cm.

4. Pfalz. 1885.

Ein Körper aus Eisen, der bei einem spezifischen Gewichte von 7,2 das Gewicht 4922,394624 kg besitzt, hat unten die Form eines Cylinders und endigt oben in einen Kegel. Der Cylinder ist doppelt so hoch als breit. Die Höhe und der Durchmesser des Kegels sind gleich dem Durchmesser des Cylinders. a) Wie groß ist der Radius des Körpers? b) Wie groß ist seine Gesamthöhe? c) Wie groß ist seine Oberfläche? ($\pi = 3,14$. Die Wurzel ist auf 3 Dezimalen ausziehen.)

Lösung.

I. Bezeichnet V das Volumen des Körpers in Kubikdezimetern, so ist $7,2 V$ sein Gewicht in Kilogramm; daher

$$7,2 V = 4922,394624$$

$$V = 683,66592 \text{ cdm.}$$

II. Das Volumen des Cylinders ist $r^2 \pi \times 4r = 4r^3 \pi$.

III. Das Volumen des Kegels ist $\frac{r^2 \pi \times 2r}{3} = \frac{2}{3} r^3 \pi$; daher

$$(4r^3 + \frac{2}{3}r^3) \pi = 683,66592$$

$$14r^3 \pi = 683,66592 \times 3$$

$$r^3 = \frac{75,96288}{14 \times 3,14} \times 9 \times 3$$

$$r^3 = 1,728 \times 27$$

$$r = 1,2 \times 3 = 3,6 \text{ dm.}$$

IV. Die gesamte Höhe ist $3,6 \times 6 = 21,6 \text{ dm.}$

V. Die Oberfläche des Körpers besteht: a) aus der Grundfläche $= r^2 \pi$, b) dem Cylindermantel $= 2r \pi \times 4r = 8r^2 \pi$, c) dem Kegelmantel $\frac{2r \pi \times SE}{2} = r \pi \sqrt{4r^2 + r^2} = r^2 \pi \sqrt{5}$. Somit ist

$$O = r^2 \pi + 8r^2 \pi + r^2 \pi \sqrt{5} = r^2 \pi (9 + \sqrt{5})$$

$$O = (3,6)^2 \times 3,14 (9 + 2,236)$$

$$O = 12,96 \times 3,14 \times 11,236$$

$$O = 457,242278 \text{ qdm.}$$

Antwort: Der Radius des Körpers beträgt 0,36 m, die gesamte Höhe 2,16 m, die Oberfläche 4,57242278 qm.

1. Oberpfalz. 1886.

Ein Baumstamm von der Form eines abgestumpften Kegels hat einen unteren Durchmesser von 0,43 m, einen oberen von 0,28 m und ist 6 m lang. a) Welches Gewicht hat derselbe, wenn das spezifische Gewicht des Holzes 0,84 ist? b) Wie teuer ist derselbe, wenn das Kubikmeter auf 4,5 $\mathcal{M}$ zu stehen kommt?

L ö s u n g.

I. Das Volumen des Baumstammes (V) wird nach der Formel berechnet

$$V = \frac{h \pi}{3} (R^2 + Rr + r^2)$$

$$V = \frac{6 \times 3,14}{3} [(0,215)^2 + 0,215 \times 0,14 + (0,14)^2]$$

$$V = 6,28 \times 0,095925 = 0,602409 \text{ cbm}$$

$$V = 602,409 \text{ Liter.}$$

II. Das Gewicht (P) ist $P = V \times 0,84$

$$P = 602,409 \times 0,84 = 506,024 \text{ kg.}$$

III. Der Preis des Stammes (G) ist

$$G = 0,602409 \times 4,5 = 2,71 \text{ M.}$$

Antwort: Das Gewicht des Stammes beträgt 506,024 kg, dessen Preis 2,71 M.

3. Oberpfalz 1887.

Ein Gefäß von der Form eines abgekürzten Kegels soll 0,38465 cbm fassen und oben einen 0,2 m kleineren Radius besitzen als unten. a) Wie groß sind die beiden Durchmesser zu nehmen, wenn die Höhe des Gefäßes 0,75 m beträgt? b) Welchen Druck hat der Boden auszuhalten?

L ö s u n g.

A. Da der größere Radius (R) den kleineren (r) um 2 dm übertrifft, so ist

$$\frac{7,5}{3} \times 3,14 [(r+2)^2 + (r+2)r + r^2] = 384,65$$

$$r^2 + 4r + 4 + r^2 + 2r + r^2 = \frac{384,65}{2,5 \times 3,14}$$

$$3r^2 + 6r = 49 - 4$$

$$r^2 + 2r = 15$$

$$r^2 + 2r + 1 = 16$$

$$r = 3 \text{ dm.}$$

$$R = 5 \text{ dm.}$$

B. Der Bodendruck ist gleich dem Drucke einer cylindrischen Wassersäule, also gleich $5^2 \times 3,14 \times 7,5 = 588,75 \text{ kg.}$

Antwort: a) Der kleinere Durchmesser ist 0,6 m, der größere 1 m groß. b) Der Bodendruck ist 588,75 kg.

4. Pfalz. 1888.

Der Umfang der Grundfläche eines Kegels ist um 17,12 cm größer als die Seitenlinie. Der Mantel beträgt 100,48 qcm. Wie groß ist der Durchmesser der Grundfläche des Kegels? Wie groß ist sein Inhalt? Was wiegt bei einem spezifischen Gewichte von 6,75 der Abfall, wenn aus diesem Kegel die größtmögliche sechsseitige regelmäßige Pyramide gemacht wird?

Lösung.

A. I. Wird der Radius der Grundfläche mit r , die Seitenlinie SB mit s bezeichnet, so ist

$$\text{I.} \quad 2r\pi = s + 17,12$$

II. Der Ausdruck für den Mantel ist $\frac{2r\pi \times s}{2}$, somit ist

$$\text{II.} \quad 2r\pi s = 100,48 \times 2 = 200,96$$

$$\text{III} = \text{I} \times s \quad 2r\pi s = s^2 + 17,12s$$

$$\text{IV (Compar.)} \quad s^2 + 17,12s = 200,96$$

$$(s + 8,56)^2 = 200,96 + 73,2736$$

$$s + 8,56 = \pm \sqrt{274,2336}$$

$$s_1 = 16,56 - 8,56 = 8 \text{ cm demnach}$$

$$r = \frac{100,48}{8 \times 3,14} = 4 \text{ cm.}$$

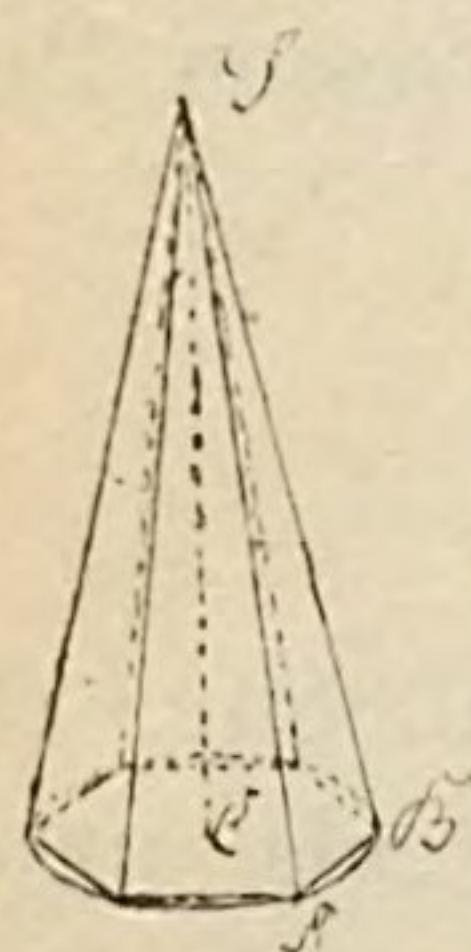


Fig. 4.

B. Der Inhalt des Kegels ist $\frac{4 \times 4 \times 3,14 \times \sqrt{8^2 - 4^2}}{3} = \frac{50,24 \times 4 \sqrt{3}}{3} = 116,0209 \text{ ccm.}$

C. Der Inhalt der sechsseitigen Pyramide ist $6 \times \frac{4^2}{4} \times \sqrt{3} \times \frac{4\sqrt{3}}{3} = 96 \text{ ccm.}$

D. Das Volumen des Abfalles ist $116,0209 - 96 = 20,0209 \text{ ccm.}$

E. Das Gewicht des Abfalles beträgt $20,0209 \times 6,75 = 135,141075 \text{ g.}$

Inhaltsverzeichnis.

Einleitung	Seite 5
A. Zifferrechnung und allgemeine Gleichungen	„ 7
B. Lösungen von Aufgaben mit benannten Grössen:	
I. Arithmetische Aufgaben	„ 15
II. Anwendung der Gleichungen:	
1. Gleichungen des 1. Grades mit einer Un-	
bekannten	„ 47
2. Gleichungen des 1. Grades mit zwei und	
mehreren Unbekannten	„ 60
3. Quadratische Gleichungen	„ 110
C. Lösungen von Aufgaben aus der Physik	„ 130



Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung
2	1. Abschnitt: Die Grundlagen der Algebra
3	2. Abschnitt: Die Grundlagen der Geometrie
4	3. Abschnitt: Die Grundlagen der Arithmetik
5	4. Abschnitt: Die Grundlagen der Analysis
6	5. Abschnitt: Die Grundlagen der Mechanik
7	6. Abschnitt: Die Grundlagen der Optik
8	7. Abschnitt: Die Grundlagen der Akustik
9	8. Abschnitt: Die Grundlagen der Wärmelehre
10	9. Abschnitt: Die Grundlagen der Elektrizität
11	10. Abschnitt: Die Grundlagen der Magnetismus
12	11. Abschnitt: Die Grundlagen der Astronomie
13	12. Abschnitt: Die Grundlagen der Meteorologie
14	13. Abschnitt: Die Grundlagen der Zoologie
15	14. Abschnitt: Die Grundlagen der Botanik
16	15. Abschnitt: Die Grundlagen der Geologie
17	16. Abschnitt: Die Grundlagen der Anthropologie
18	17. Abschnitt: Die Grundlagen der Ethnologie
19	18. Abschnitt: Die Grundlagen der Philosophie
20	19. Abschnitt: Die Grundlagen der Psychologie
21	20. Abschnitt: Die Grundlagen der Pädagogik
22	21. Abschnitt: Die Grundlagen der Medizin
23	22. Abschnitt: Die Grundlagen der Pharmazie
24	23. Abschnitt: Die Grundlagen der Chirurgie
25	24. Abschnitt: Die Grundlagen der Zahnmedizin
26	25. Abschnitt: Die Grundlagen der Augenheilkunde
27	26. Abschnitt: Die Grundlagen der Ohrenheilkunde
28	27. Abschnitt: Die Grundlagen der Hals-, Nasen- und Kehlkopfheilkunde
29	28. Abschnitt: Die Grundlagen der Brustheilkunde
30	29. Abschnitt: Die Grundlagen der Kinderheilkunde
31	30. Abschnitt: Die Grundlagen der Frauenheilkunde
32	31. Abschnitt: Die Grundlagen der Geburtshilfe
33	32. Abschnitt: Die Grundlagen der Gynäkologie
34	33. Abschnitt: Die Grundlagen der Urologie
35	34. Abschnitt: Die Grundlagen der Nephrologie
36	35. Abschnitt: Die Grundlagen der Endokrinologie
37	36. Abschnitt: Die Grundlagen der Immunologie
38	37. Abschnitt: Die Grundlagen der Infektionskrankheiten
39	38. Abschnitt: Die Grundlagen der Bakteriologie
40	39. Abschnitt: Die Grundlagen der Virologie
41	40. Abschnitt: Die Grundlagen der Parasitologie
42	41. Abschnitt: Die Grundlagen der Pathologie
43	42. Abschnitt: Die Grundlagen der Histologie
44	43. Abschnitt: Die Grundlagen der Anatomie
45	44. Abschnitt: Die Grundlagen der Physiologie
46	45. Abschnitt: Die Grundlagen der Biochemie
47	46. Abschnitt: Die Grundlagen der Molekularbiologie
48	47. Abschnitt: Die Grundlagen der Zellbiologie
49	48. Abschnitt: Die Grundlagen der Entwicklungsbiologie
50	49. Abschnitt: Die Grundlagen der Systematik
51	50. Abschnitt: Die Grundlagen der Ökologie
52	51. Abschnitt: Die Grundlagen der Umweltbiologie
53	52. Abschnitt: Die Grundlagen der Naturschutzbiologie
54	53. Abschnitt: Die Grundlagen der Landschaftsökologie
55	54. Abschnitt: Die Grundlagen der Landschaftsplanung
56	55. Abschnitt: Die Grundlagen der Landschaftsentwicklung
57	56. Abschnitt: Die Grundlagen der Landschaftsarchitektur
58	57. Abschnitt: Die Grundlagen der Landschaftsgestaltung
59	58. Abschnitt: Die Grundlagen der Landschaftsrehabilitation
60	59. Abschnitt: Die Grundlagen der Landschaftsmanagement
61	60. Abschnitt: Die Grundlagen der Landschaftsmonitoring
62	61. Abschnitt: Die Grundlagen der Landschaftsberichterstattung
63	62. Abschnitt: Die Grundlagen der Landschaftsplanung und -entwicklung
64	63. Abschnitt: Die Grundlagen der Landschaftsarchitektur und -gestaltung
65	64. Abschnitt: Die Grundlagen der Landschaftsrehabilitation und -management
66	65. Abschnitt: Die Grundlagen der Landschaftsmonitoring und -berichterstattung
67	66. Abschnitt: Die Grundlagen der Landschaftsplanung und -entwicklung
68	67. Abschnitt: Die Grundlagen der Landschaftsarchitektur und -gestaltung
69	68. Abschnitt: Die Grundlagen der Landschaftsrehabilitation und -management
70	69. Abschnitt: Die Grundlagen der Landschaftsmonitoring und -berichterstattung
71	70. Abschnitt: Die Grundlagen der Landschaftsplanung und -entwicklung
72	71. Abschnitt: Die Grundlagen der Landschaftsarchitektur und -gestaltung
73	72. Abschnitt: Die Grundlagen der Landschaftsrehabilitation und -management
74	73. Abschnitt: Die Grundlagen der Landschaftsmonitoring und -berichterstattung
75	74. Abschnitt: Die Grundlagen der Landschaftsplanung und -entwicklung
76	75. Abschnitt: Die Grundlagen der Landschaftsarchitektur und -gestaltung
77	76. Abschnitt: Die Grundlagen der Landschaftsrehabilitation und -management
78	77. Abschnitt: Die Grundlagen der Landschaftsmonitoring und -berichterstattung
79	78. Abschnitt: Die Grundlagen der Landschaftsplanung und -entwicklung
80	79. Abschnitt: Die Grundlagen der Landschaftsarchitektur und -gestaltung
81	80. Abschnitt: Die Grundlagen der Landschaftsrehabilitation und -management
82	81. Abschnitt: Die Grundlagen der Landschaftsmonitoring und -berichterstattung
83	82. Abschnitt: Die Grundlagen der Landschaftsplanung und -entwicklung
84	83. Abschnitt: Die Grundlagen der Landschaftsarchitektur und -gestaltung
85	84. Abschnitt: Die Grundlagen der Landschaftsrehabilitation und -management
86	85. Abschnitt: Die Grundlagen der Landschaftsmonitoring und -berichterstattung
87	86. Abschnitt: Die Grundlagen der Landschaftsplanung und -entwicklung
88	87. Abschnitt: Die Grundlagen der Landschaftsarchitektur und -gestaltung
89	88. Abschnitt: Die Grundlagen der Landschaftsrehabilitation und -management
90	89. Abschnitt: Die Grundlagen der Landschaftsmonitoring und -berichterstattung
91	90. Abschnitt: Die Grundlagen der Landschaftsplanung und -entwicklung
92	91. Abschnitt: Die Grundlagen der Landschaftsarchitektur und -gestaltung
93	92. Abschnitt: Die Grundlagen der Landschaftsrehabilitation und -management
94	93. Abschnitt: Die Grundlagen der Landschaftsmonitoring und -berichterstattung
95	94. Abschnitt: Die Grundlagen der Landschaftsplanung und -entwicklung
96	95. Abschnitt: Die Grundlagen der Landschaftsarchitektur und -gestaltung
97	96. Abschnitt: Die Grundlagen der Landschaftsrehabilitation und -management
98	97. Abschnitt: Die Grundlagen der Landschaftsmonitoring und -berichterstattung
99	98. Abschnitt: Die Grundlagen der Landschaftsplanung und -entwicklung
100	99. Abschnitt: Die Grundlagen der Landschaftsarchitektur und -gestaltung
101	100. Abschnitt: Die Grundlagen der Landschaftsrehabilitation und -management
102	101. Abschnitt: Die Grundlagen der Landschaftsmonitoring und -berichterstattung
103	102. Abschnitt: Die Grundlagen der Landschaftsplanung und -entwicklung
104	103. Abschnitt: Die Grundlagen der Landschaftsarchitektur und -gestaltung
105	104. Abschnitt: Die Grundlagen der Landschaftsrehabilitation und -management
106	105. Abschnitt: Die Grundlagen der Landschaftsmonitoring und -berichterstattung
107	106. Abschnitt: Die Grundlagen der Landschaftsplanung und -entwicklung
108	107. Abschnitt: Die Grundlagen der Landschaftsarchitektur und -gestaltung
109	108. Abschnitt: Die Grundlagen der Landschaftsrehabilitation und -management
110	109. Abschnitt: Die Grundlagen der Landschaftsmonitoring und -berichterstattung
111	110. Abschnitt: Die Grundlagen der Landschaftsplanung und -entwicklung
112	111. Abschnitt: Die Grundlagen der Landschaftsarchitektur und -gestaltung
113	112. Abschnitt: Die Grundlagen der Landschaftsrehabilitation und -management
114	113. Abschnitt: Die Grundlagen der Landschaftsmonitoring und -berichterstattung
115	114. Abschnitt: Die Grundlagen der Landschaftsplanung und -entwicklung
116	115. Abschnitt: Die Grundlagen der Landschaftsarchitektur und -gestaltung
117	116. Abschnitt: Die Grundlagen der Landschaftsrehabilitation und -management
118	117. Abschnitt: Die Grundlagen der Landschaftsmonitoring und -berichterstattung
119	118. Abschnitt: Die Grundlagen der Landschaftsplanung und -entwicklung
120	119. Abschnitt: Die Grundlagen der Landschaftsarchitektur und -gestaltung
121	120. Abschnitt: Die Grundlagen der Landschaftsrehabilitation und -management
122	121. Abschnitt: Die Grundlagen der Landschaftsmonitoring und -berichterstattung
123	122. Abschnitt: Die Grundlagen der Landschaftsplanung und -entwicklung
124	123. Abschnitt: Die Grundlagen der Landschaftsarchitektur und -gestaltung
125	124. Abschnitt: Die Grundlagen der Landschaftsrehabilitation und -management
126	125. Abschnitt: Die Grundlagen der Landschaftsmonitoring und -berichterstattung
127	126. Abschnitt: Die Grundlagen der Landschaftsplanung und -entwicklung
128	127. Abschnitt: Die Grundlagen der Landschaftsarchitektur und -gestaltung
129	128. Abschnitt: Die Grundlagen der Landschaftsrehabilitation und -management
130	129. Abschnitt: Die Grundlagen der Landschaftsmonitoring und -berichterstattung
131	130. Abschnitt: Die Grundlagen der Landschaftsplanung und -entwicklung
132	131. Abschnitt: Die Grundlagen der Landschaftsarchitektur und -gestaltung
133	132. Abschnitt: Die Grundlagen der Landschaftsrehabilitation und -management
134	133. Abschnitt: Die Grundlagen der Landschaftsmonitoring und -berichterstattung
135	134. Abschnitt: Die Grundlagen der Landschaftsplanung und -entwicklung
136	135. Abschnitt: Die Grundlagen der Landschaftsarchitektur und -gestaltung
137	136. Abschnitt: Die Grundlagen der Landschaftsrehabilitation und -management
138	137. Abschnitt: Die Grundlagen der Landschaftsmonitoring und -berichterstattung
139	138. Abschnitt: Die Grundlagen der Landschaftsplanung und -entwicklung
140	139. Abschnitt: Die Grundlagen der Landschaftsarchitektur und -gestaltung
141	140. Abschnitt: Die Grundlagen der Landschaftsrehabilitation und -management
142	141. Abschnitt: Die Grundlagen der Landschaftsmonitoring und -berichterstattung
143	142. Abschnitt: Die Grundlagen der Landschaftsplanung und -entwicklung
144	143. Abschnitt: Die Grundlagen der Landschaftsarchitektur und -gestaltung
145	144. Abschnitt: Die Grundlagen der Landschaftsrehabilitation und -management
146	145. Abschnitt: Die Grundlagen der Landschaftsmonitoring und -berichterstattung
147	146. Abschnitt: Die Grundlagen der Landschaftsplanung und -entwicklung
148	147. Abschnitt: Die Grundlagen der Landschaftsarchitektur und -gestaltung
149	148. Abschnitt: Die Grundlagen der Landschaftsrehabilitation und -management
150	149. Abschnitt: Die Grundlagen der Landschaftsmonitoring und -berichterstattung

Lösungen der Rechnungsaufgaben für Schuldienst-Exspektanten

Bd.: 1

1897

Bavar. 1275 qo-1/4

urn:nbn:de:bvb:12-bsb11801562-5